

Una revisión de las nuevas aplicaciones metodológicas del cokrigaje en Ciencias de la Tierra

E. Pardo-Igúzquiza⁽¹⁾, M. Chica-Olmo⁽²⁾, J. P. Rigol-Sánchez⁽³⁾, J. A. Luque-Espinat⁽¹⁾ y V. Rodríguez-Galiano⁽²⁾

(1) Instituto Geológico y Minero de España (IGME). Calle Ríos Rosas, 23. 28003 Madrid
e.pardo@igme.es

(2) Laboratorio RSGIS. Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. Campus Fuentenueva s/n. 18071 Granada.
(3) Laboratorio RSGIS. Departamento de Geología. Facultad de Ciencias. Universidad de Jaén. E-23071 Jaén.
mchica@ugr.es, jprigol@ujaen.es, jaluque@igme.es, vrgaliano@ugr.es

RESUMEN

El cokrigaje es el interpolador geoestadístico multivariante que además puede utilizarse para estimar factores espaciales (cokrigaje factorial) y para estimar la función de densidad local (cokrigaje de indicatrices). Sin embargo, estas no son las únicas extensiones que permite el cokrigaje, sino que su gran versatilidad se muestra en este trabajo con la revisión de nuevas aplicaciones. La primera extensión es el cokrigaje de desagregación que se ha utilizado satisfactoriamente en Teledetección para la fusión de imágenes de diferente resolución espacial y espectral. En segundo lugar está el uso del cokrigaje como solución al problema inverso en hidrogeología donde se estima la transmisividad haciendo uso de las abundantes medidas existentes del nivel piezométrico y teniendo en cuenta la ecuación del flujo subterráneo que relaciona la transmisividad y el nivel piezométrico. En tercer lugar tenemos el cokrigaje adaptado para estimar la derivada direccional de una variable escalar e ilustrado con la estimación del gradiente hidráulico en un acuífero. Finalmente el cokrigaje se puede adaptar para introducir las condiciones de contorno en el problema de estimación, como por ejemplo, en la estimación del nivel piezométrico de un acuífero teniendo en cuenta los bordes impermeables. Se ilustra toda la anterior metodología con datos del acuífero de la Vega de Granada.

Palabras clave: condiciones de contorno, derivada direccional, desagregación, gradiente, problema inverso

A review of new methodological applications for co-kriging in Earth Sciences

ABSTRACT

Cokriging is the multivariate geostatistical estimator that has also been used for estimating spatial factors (factorial cokriging) and for estimating the local distribution function (indicator cokriging). Nevertheless, we show here the flexibility that cokriging offers by reviewing four new applications: (i) downscaling cokriging for image sharpening in remote sensing; (ii) cokriging as a solution to the inverse problem in hydrogeology; (iii) cokriging for estimating directional derivatives; and (iv) cokriging interpolation taking into account boundary conditions. The different applications are illustrated with data from the Vega de Granada aquifer in southern Spain.

Key words: boundary conditions, directional derivative, downscaling, gradient, inverse problem

ABRIDGED ENGLISH VERSION

Introduction

Geostatistics is accepted nowadays as a standard technique for spatial analysis in GIS applications. The use of GIS technology for solving problems in hydrogeology and environmental geology is constantly increasing. Within this context cokriging is the multivariate geostatistical interpolation for generating maps of a primary variable using data concerning that variable and also secondary variables correlated with the former. In geostatistics the primary and secondary variables are random functions and the most general model is to assume that the random function has two components: a smooth component (the drift), which represents low-frequency variation, and a residual, which represents the high-frequency variability. The residuals are considered to be second-order stationary and thus characterized by the covariance function and the cross-covariance. The cokriging system is obtained by minimizing the estimation variance taking into account the conditions of unbiasedness. Figure 1A shows the usual experimental data disposition in cokriging [which is half-way between a perfect heterotopic case (Figure 1B) and a perfect isotopic case (Figure 1C)], where some of the primary and secondary data have been measured at the same locations. Nevertheless, the most efficient case is when the secondary variable is known throughout the study area (Figure 1D). This is the ordinary cokriging estimator that is frequently used in many applications. We review here four different extensions of ordinary cokriging and illustrate them in a case study.

Downscaling cokriging

In downscaling cokriging, the estimation support of the variable being estimated is smaller than its experimental support. In remote sensing, downscaling cokriging may be used for image sharpening or image fusion. In this kind of cokriging there are several covariances and cross-covariances that must be estimated using a deconvolution-convolution numerical procedure.

Cokriging as solution of the inverse problem in hydrogeology

The inverse problem in hydrogeology consists of gaining information about the hydraulic conductivity or transmissivity of an aquifer by using data concerning the water head and equations defining groundwater flow. The cokriging solution involves using a cross-covariance between transmissivity and water head that has been obtained theoretically by taking into account the groundwater flow equations and aquifer boundary conditions. The purpose of the inverse problem is to use an easy-to-measure variable (water head) to gain information about variables which are either more difficult or more expensive to measure (transmissivity).

Cokriging for estimating directional derivatives

There are problems in earth sciences where one is interested in calculating the directional derivative of a given scalar variable. For example, in a two dimensional problem the hydraulic gradient is a vector which two components are the directional derivatives of water head along the directions of the principal axes. Cokriging can be adapted for this kind of estimation. Furthermore, by using linear-systems theory, the covariance of the directional derivative and the cross-covariance between the directional derivative and the scalar variable can be obtained theoretically from the covariance of the scalar variable. Other applications in earth sciences may be found in terrain analysis and geophysics.

Cokriging for estimating a variable taking into account boundary conditions

This extension is closely related to the previous one but the roles of primary and secondary variables are interchanged. The primary variable is the scalar variable and the secondary variable is the directional derivative. Thus, boundary conditions can be included in the estimation by expressing the boundary conditions in the form of directional derivatives. For instance, impermeable boundary conditions in an aquifer reveal that the directional derivatives of the water head perpendicular to the boundary are null.

Case study

We have chosen the Vega de Granada area (Fig. 2A) in southern Spain to illustrate the different extensions of cokriging dealt with in this paper. The area is an unconfined detrital aquifer (Fig. 2B) of around 200 km². Figure 3 shows the ETM+ Landsat-7 images for band 1 (Fig. 3A) and the panchromatic band 8 (Fig. 3B). The task of the study was to estimate the multispectral images for bands 1, 2 and 3, which have low spatial resolution, at the same resolution as the panchromatic band (secondary information). Figure 4A shows the experimental variogram of band 8 and the induced model obtained by Equation (21) when estimating a point-support covariance (or variogram) by deconvolution. The same is done for the multispectral bands, and with the point-support models thus obtained it is possible to estimate all the covariances needed for downscaling cokriging of bands 1, 2 and 3. Once the fused bands are obtained it is possible to end up with false colour compositions such as the one shown in Figure 4B, which can be used in different environmental applications.

The other cokriging extensions will be illustrated with the water-head data of Figure 5A and log-transmissivity data of Figure 5B. It can be seen how the transmissivity data are measured preferentially in the middle of the aquifer, where transmissivity is high, whilst the water-head data are more homogeneously distributed throughout the aquifer. The experimental semi-variogram model of log-transmissivity is shown in Figure 6 together with the model fitted by maximum likelihood. The latter is an inference method that can be used to assess the uncertainty of the estimated parameters of the variogram (Fig. 7). The log-transmissivity kriging map is shown in Figure 8A whilst the estimation standard deviation is shown in Figure 8B. It can be seen that the greater errors occur at the border of the aquifer, where there is no transmissivity data. While log-transmissivity does not show a clear drift the water-head data do show a drift, which produces the high anisotropic behaviour of the experimental variogram in Figure 9A. The experimental variogram of the stationary residual and the fitted model appears in Figure 9B. The water-head cokriging map is shown in Figure 10A whilst the estimation standard deviation is shown in Figure 10B. The geostatistical solution to the inverse problem is set out in Figure 11. Figure 11A shows the cokriging map whilst Figure 11B shows the estimation standard error. A comparison of Figure 11A with Figure 8A reveals that in the former there is more detail in the variability of the log-transmissivity and the standard deviation of the estimation error is smaller than in ordinary cokriging. The estimation of the water head may also be improved by the same cokriging system of the inverse problem, as can be seen in Figure 12, which may be compared with Figure 10.

The third extension of cokriging is the estimation of directional derivatives. The estimated directional derivative of the water head in an easterly direction is shown in Figure 13A. Figure 13B shows the standard deviation of the estimation error. The gradient may be arrived at by estimating the directional derivatives along the main axes of the co-ordinates. Furthermore, because the gradient is a linear operator it makes sense to estimate the mean gradient for the whole aquifer, as is illustrated in Figure 14A. Figure 14B shows the standard error of the estimate of the mean gradient. The gradient may be locally estimated, on the other hand, and represented by an arrow map such as the one in Figure 15, in which the direction of the arrow gives the direction of the gradient and the length of the arrow is proportional to the magnitude of the gradient at that location.

The forth and last extension is the estimation of a scalar variable taking into account boundary conditions. The boundary conditions are taking into account as known directional derivatives. For example in Figure 16 the boundaries of no flow as well as the directions of null directional derivatives are shown for the Vega de Granada aquifer. The difference of a estimated piezometric map without considering boundary conditions and taking into account boundary conditions may be seen by comparing Figures 17A and Figure 17B. Figure 17B that has been generated by taking into account the boundary conditions, shows how the water head level contours are perpendicular to the no-flow boundaries.

Conclusions

Geostatistical cokriging is not only an efficient method of multivariate interpolation but a very flexible interpolator which, with the different extensions show in this paper, has new applications in different disciplines of earth sciences. Downscaling cokriging can be used in remote sensing for image fusion but other applications might be envisaged in spatial analysis. With regard to the cokriging solution to the inverse

problem in hydrogeology, in other problem settings other physical equations describing the relationship between primary and secondary variables could be used to obtain an appropriate cross-covariance for cokriging. We have illustrated the cokriging method for estimating directional derivatives with the calculation of the hydraulic gradient but its use can be extended to slope estimation in terrain analysis or to other gradient estimation problems in geophysics. Finally, the inclusion of boundary conditions leads to an improvement in kriging estimates of water head but it may clearly be useful in the estimation of any other scalar variable where there is boundary information.

Introducción

El análisis espacial es una etapa fundamental en el desarrollo de muchas aplicaciones y estudios en hidrogeología y geología ambiental. Dicho análisis está actualmente integrándose en modelos de sistemas de información geográfica (SIG) para tratar problemas relacionados con el medio ambiente y el cambio global. Es por ello que el análisis espacial constituye un módulo operativo muy importante en la metodología SIG que lo caracteriza frente a las bases de datos espaciales, la cartografía automática o los paquetes estadísticos clásicos. Dicho análisis espacial comprende un gran número de técnicas procedentes de la estadística, el análisis de señales, el análisis de imágenes, técnicas computacionales modernas como los algoritmos genéticos, las redes neuronales etc. Un apartado de gran importancia lo constituye también la geoestadística cuyos módulos más importantes como la inferencia y el modelado del variograma, la estimación espacial por krigaje y la simulación condicional se han incluido recientemente en los programas SIG más relevantes. En este marco de trabajo, es bien conocido que el cokrigaje es la extensión multivariante del método de interpolación espacial geoestadística conocido como krigaje (Matheron, 1963). En el caso más sencillo, una variable regionalizada de interés, o variable primaria, $Z(\mathbf{u})$ se estima a partir de valores experimentales de dicha variable y valores experimentales de una variable secundaria, $Y(\mathbf{u})$, que está correlacionada con la variable primaria. Así, el valor de la variable primaria en una localización \mathbf{u}_0 donde no se ha muestreado, se estima como una combinación lineal de las variables primaria y secundaria multiplicadas por unos pesos (Journel and Huijbregts, 1978):

$$Z^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 Z(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j^0 Y(\mathbf{u}_j). \quad (1)$$

Donde $Z^*(\mathbf{u}_0)$ es el valor estimado de la variable primaria en la localización espacial $\mathbf{u}_0 = \{x_0, y_0\}$ que se considera un punto en el plano. El paso a una dimensión superior no entraña ninguna dificultad. $\{Z(\mathbf{u}_i); i = 1, \dots, n\}$ son el conjunto de n valores experimentales de la variable primaria. $\{Y(\mathbf{u}_j); j = 1, \dots, m\}$ son el conjunto de m valores experimentales de la variable secundaria. λ_i^0 es el peso aplicado a $Z(\mathbf{u}_i)$ en la estimación de

$Z(\mathbf{u}_0)$ y β_j^0 es el peso aplicado a $Y(\mathbf{u}_j)$ en la estimación de $Z(\mathbf{u}_0)$.

En geoestadística la variable espacial $Z(\mathbf{u})$ se modela como una variable aleatoria, y el valor experimental observado es una realización de dicha variable aleatoria. Asimismo el conjunto de todas las variables aleatorias $Z(\mathbf{u})$ de una región del espacio $\mathbf{u} \in \chi$ de interés se considera como una función aleatoria $Z(\mathbf{u})$ o campo aleatorio. Si $\chi \subset \mathbb{R}^d$, y $d = 2$ se tiene un problema bidimensional como en este trabajo. Asimismo, el modelo geoestadístico más simple pero a la vez más útil es aquel en el que la función aleatoria $Z(\mathbf{u})$ se descompone en dos componentes (Wackernagel, 1991):

$$Z(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}), \quad (2)$$

donde $m(\mathbf{u})$: componente determinista que representa la deriva o tendencia, esto es, la variabilidad suave o de baja frecuencia de la función aleatoria. La deriva se asume como la esperanza matemática de la función aleatoria:

$$E\{Z(\mathbf{u})\} = m(\mathbf{u}). \quad (3)$$

La deriva se modela usualmente como un polinomio de bajo orden, aunque existen otras alternativas (ver por ejemplo Brochu y Marcotte, 2003):

$$m(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^p b_i f_i(\mathbf{u}), \quad (4)$$

con:

$\{b_i; i = 0, \dots, p\}$: conjunto de coeficientes desconocidos que es necesario estimar. $\{f_i(\mathbf{u}); i = 0, \dots, p\}$: conjunto de funciones de base conocidas, usualmente monomios de las coordenadas. Por ejemplo $\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ son las seis funciones de base para el caso de una deriva polinomial cuadrática en un problema bidimensional.

$R(\mathbf{u})$ es el residuo o componente estocástico estacionario de segundo orden (Chiles y Delfiner, 1999) de media nula y con variograma $\gamma_R(\mathbf{h})$ y covarianza $C_R(\mathbf{h})$, cumpliéndose la relación conocida $\gamma_R(\mathbf{h}) = C_R(0) - C_R(\mathbf{h})$. El residuo representa la variabilidad de alta frecuencia de la función aleatoria en torno a la deriva. Es de notar que la covarianza o el variograma del residuo es igual al variograma de $Z(\mathbf{u})$, esto es, $C_Z(\mathbf{h}) = C_R(\mathbf{h})$:

$$C_R(\mathbf{h}) = E\{R(\mathbf{u})R(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} = E\{[Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})][Z(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{u} + \mathbf{h})]\} = C_Z(\mathbf{h}) . \quad (5)$$

Si $Z(\mathbf{u})$ es estacionaria de segundo orden, entonces la deriva es una constante para toda la zona de estudio:

$$m(\mathbf{u}) = m_Z, \quad (6)$$

donde se ha considerado la notación $m_z = b_0$ y $f_0 = 1$.

La variable secundaria $Y(\mathbf{u})$ también se modela como una función aleatoria aunque en general se considera sin deriva, estacionaria de segundo orden con su propio variograma $\gamma_y(\mathbf{h})$.

Los pesos del estimador de cokrigaje de la ecuación (1) se obtienen de resolver el sistema de cokrigaje que se obtiene al minimizar la varianza de estimación a la vez que se impone al estimador la condición de ausencia de sesgo.

La condición de ausencia de sesgo implica que la esperanza matemática del error de estimación es cero:

$$E\{Z^*(\mathbf{u}_0) - Z(\mathbf{u}_0)\} = 0, \quad (7)$$

lo cual implica que los pesos han de cumplir una serie de condiciones:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 = 1; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_j^0 = 0. \quad (9)$$

La varianza del error de estimación se puede expresar como (Isaaks y Srivastava, 1989):

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z^*(\mathbf{u}_0) - Z(\mathbf{u}_0)\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^0 \lambda_j^0 C_Z(\mathbf{h}_{ij}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i^0 \beta_j^0 C_Y(\mathbf{h}_{ij}) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i^0 \beta_j^0 C_{ZY}(\mathbf{h}_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 C_Z(\mathbf{h}_{i0}) - 2 \sum_{j=1}^m \beta_j^0 C_Y(\mathbf{h}_{j0}), \end{aligned} \quad (10)$$

donde $C_{Zj}(\mathbf{h}_{ij})$ es la covarianza entre las variables aleatorias $Z(\mathbf{u}_i)$ y $Z(\mathbf{u}_j)$ cuya separación es igual al vector $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$. Del mismo modo se definen $C_{ZY}(\mathbf{h}_{ij})$ como la covarianza cruzada entre las variables aleatorias $Z(\mathbf{u}_i)$ e $Y(\mathbf{u}_j)$:

$$C_{ZY}(\mathbf{h}_{ij}) = E\{Z(\mathbf{u}_i)Y(\mathbf{u}_j)\} - m_Z m_Y. \quad (11)$$

El sistema de cokrigaje se puede expresar en forma matricial como:

$$\mathbf{C}\lambda = \mathbf{B}, \quad (12)$$

con

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_Z(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & C_Z(\mathbf{h}_{1n}) & C_{ZY}(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & C_{ZY}(\mathbf{h}_{1m}) & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_Z(\mathbf{h}_{n1}) & \cdots & C_Z(\mathbf{h}_{nn}) & C_{ZY}(\mathbf{h}_{n1}) & \cdots & C_{ZY}(\mathbf{h}_{nm}) & 1 & 0 \\ C_{YZ}(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & C_{YZ}(\mathbf{h}_{1n}) & C_Y(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & C_Y(\mathbf{h}_{1m}) & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{YZ}(\mathbf{h}_{m1}) & \cdots & C_{YZ}(\mathbf{h}_{mn}) & C_Y(\mathbf{h}_{m1}) & \cdots & C_Y(\mathbf{h}_{mm}) & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_n^0 \\ \beta_1^0 \\ \vdots \\ \beta_m^0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_Z(\mathbf{h}_{10}) \\ \vdots \\ C_Z(\mathbf{h}_{n0}) \\ C_{ZY}(\mathbf{h}_{10}) \\ \vdots \\ C_{ZY}(\mathbf{h}_{m0}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

La solución del sistema de cokrigaje $\lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$ proporciona los valores de los pesos a utilizar en el estimador de cokrigaje dado en la ecuación (1).

El sistema de cokrigaje definido por la ecuación (12) es conocido como sistema de cokrigaje ordinario (Journel y Hjibregts, 1978; Isaaks y Srivastava, 1989; Deutsch y Journel, 1992; Goovaerts, 1997; Chiles y Delfiner, 1999; Remy et al., 2009) y es el más utilizado en la práctica; habiéndose utilizado en minería (por ejemplo Journel y Hjibregts (1978) utilizando leyes de diferentes menas en depósitos de sulfuros masivos polimetálicos), hidrogeología (por ejemplo Hoeksema et al. (1989) utilizando nivel piezométrico y cota topográfica del terreno), teledetección (por ejemplo Atkinson et al. (1994) utilizando imágenes obtenidas por sensores aerotransportados y de satélite), edafología (por ejemplo Lesch et al. 1995 con variables de salinidad e inducción electromagnética), geofísica (por ejemplo Doyen, (1988) utilizando porosidad y datos de sísmica de reflexión), meteorología y climatología (por ejemplo Pardo-Igúzquiza (1998) utilizando lluvia y topografía), entre otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra.

El cokrigaje es particularmente útil cuando la variable secundaria está mejor muestreada que la variable primaria como puede ser la estimación de lluvia utilizando datos de lluvia y datos de topografía procedentes de un modelo digital de elevaciones (Figura 1D). El caso en el que variable primaria y variable secundaria están muestreadas en exactamente las mis-

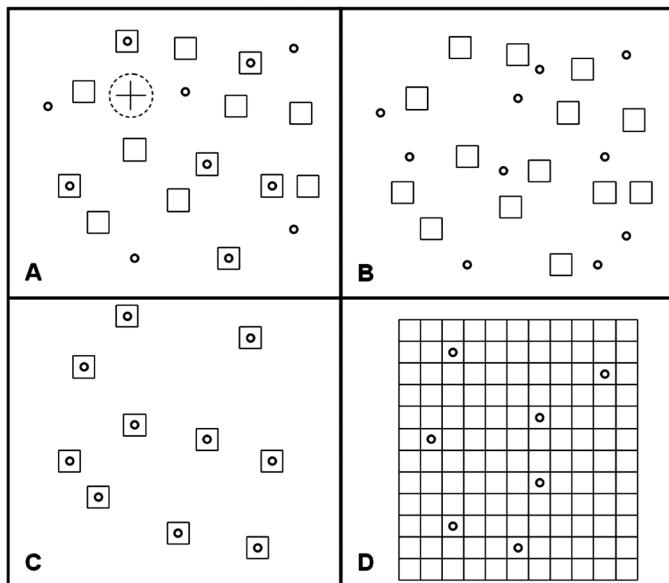


Figura 1. Configuraciones de cokrigeaje. A: caso heterotópico con localizaciones donde se han muestreado la variable primaria y la variable secundaria y otras localizaciones donde sólo se han muestreado o la variable primaria o la variable secundaria. En el cokrigeaje puntual se trata de determinar el valor de la variable primaria en el punto señalado por la cruz mientras que en el cokrigeaje de bloques se pretende conocer el valor medio de la variable primaria dentro del círculo con línea discontinua. B: caso heterotópico perfecto, no hay localizaciones espaciales donde se hayan muestreado ambas variables simultáneamente. Este caso puede presentar un problema en cuanto a la estimación del variograma cruzado. C: caso isotópico donde las variables se han medido en localizaciones comunes. D: caso heterotópico donde la variable secundaria muestrea completamente el área de interés dando lugar al caso más interesante de aplicación del cokrigeaje.

Figure 1. Experimental sampling plans in cokriging. A: The heterotopic case, including sites where both the primary and secondary variables were sampled and others where only the primary or the secondary variable was measured. In point cokriging the task is to estimate the value of the primary variable at the point marked by a cross in the figure, whilst in block kriging the aim is to estimate the mean value of the primary variable inside a given area (circled with a dashed line in the figure). B: The perfect heterotopic case, in which there are no sites where both the primary and secondary variables have been measured. This is a problematic case for the estimation of the cross-variogram. C: Isotropic case, in which both the primary and secondary variables have been measured at common sites. D: Heterotopic case, in which the secondary variable is known for the whole study area, giving rise to the most favourable case for the application of cokriging.

mas localizaciones (caso isotópico, Figura 1C) y bajo determinados supuestos, los resultados de cokrigeaje son los mismos a los de krigeaje (Rivoirard, 1994). El trabajo adicional que supone la utilización de la información secundaria es fundamentalmente un problema de inferencia estadística ya que además del variograma (o la covarianza) de la variable primaria se han de estimar el variograma de la variable secundaria y el variograma cruzado entre la variable primaria y secundaria. El cálculo del variograma cruzado puede ser un problema en el caso perfectamente heterotópico,

esto es, cuando no hay localizaciones experimentales donde se hayan medido tanto la variable primaria como la secundaria (Figure 1B) en el cual puede ser útil el uso de pseudo-variograma cruzado (Myers, 1982, 1983, 1991). En cualquier caso el modelo lineal de corregralización (Goulard y Voltz, 1992) es el más utilizado en la práctica. Con el modelo lineal de corregralización las mismas estructuras se utilizan para modelar los diferentes variogramas experimentales directos y cruzados:

$$\gamma_Z(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^K a_k g_k(\mathbf{h}), \quad (15)$$

$$\gamma_Y(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^K b_k g_k(\mathbf{h}), \quad (16)$$

$$\gamma_{ZY}(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^K c_k g_k(\mathbf{h}), \quad (17)$$

donde los coeficientes de corregralización deben cumplir la condición:

$$\begin{vmatrix} a_k & c_k \\ c_k & b_k \end{vmatrix} = a_k b_k - c_k^2 > 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (18)$$

La función $g_k(\mathbf{h})$ es una estructura básica de variograma, esto es un variograma de meseta unidad y un alcance (isótropo o anisótropo) especificado. Cuando $a_k = 0$, la estructura básica k -ésima no aparece en el variograma de la variable primaria, cuando $b_k = 0$, la estructura básica k -ésima no aparece en el variograma de la variable secundaria y cuando $c_k = 0$, la estructura básica k -ésima no aparece en el variograma cruzado. Nótese que una estructura básica que aparezca en el variograma cruzado ha de aparecer obligatoriamente en los variogramas directos.

En cuanto al soporte a estimar puede ser una localización puntual o cuasi-puntual (cokrigeaje puntual) o el valor medio en un área (cokrigeaje de bloques) siendo la información experimental de tipo puntual (Figura 1A).

Además de la anterior aplicación clásica donde el cokrigeaje se utiliza para la estimación de una variable primaria con datos de una variable secundaria mejor muestreada, también son aplicaciones clásicas el uso de cokrigeaje para estimar componentes o factores espaciales mediante cokrigeaje factorial (Matheron, 1982; Pardo-Igúzquiza y Dowd, 2002) o la estimación de la función local de densidad de probabilidad mediante cokrigeaje de indicatrices (Journel, 1983; Pardo-Igúzquiza y Dowd, 2005).

Además de las aplicaciones anteriores, que pueden considerarse como clásicas, existen otras nuevas aplicaciones metodológicas del cokrigaje que surgen de las siguientes condiciones especiales:

(i) La variable primaria se quiere estimar sobre un soporte sobre el cual no ha sido observada y no existe información puntual de la variable primaria. Aunque pueda parecerlo, este caso no es el cokrigaje de bloques donde también se estima la variable primaria sobre un soporte que no ha sido observado ya que en cokrigaje de bloques sí se dispone de información puntual de la variable primaria (Figura 1A) y por tanto se ha estimado el variograma sobre soporte puntual, siendo por consiguiente posible el cálculo del variograma sobre otro soporte por regularización del variograma puntual en el soporte no puntual (Journel y Huijbregts, 1978).

Este cokrigaje donde la variable primaria no se conoce sobre soporte puntual aparece típicamente en teledetección para el problema de fusión de imágenes que no es sino un problema de desagregación ("downscaling"), donde la variable siempre se observa sobre un soporte no puntual definido por la resolución espacial de la banda espectral que se considere. El objetivo que se pretende es el obtener imágenes de alta resolución espacial para bandas espectrales con baja resolución espacial experimental. El cokrigaje de desagregación permite resolver este problema.

- (ii) Otra aplicación no clásica es cuando la variable primaria y la variable secundaria están relacionadas por una ecuación física conocida como por ejemplo la ecuación diferencial de flujo subterráneo que relaciona transmisividad y piezometría. Un sistema de cokrigaje que permite estimar la transmisividad a partir de medidas de transmisividad y nivel piezométrico y teniendo en cuenta la ecuación de flujo subterráneo, suponen la solución geoestadística al problema inverso en hidrogeología.
- (iii) Otro interesante recurso metodológico resulta de considerar como variable de interés la derivada espacial (direccional) de una variable escalar. La variable escalar hace de variable secundaria y la derivada direccional se considera como variable primaria. Así por ejemplo, el gradiente, como el gradiente hidráulico en hidrogeología, es una variable vectorial cuyas dos (para el caso bidimensional) componentes son las derivadas direccionales a lo largo de los ejes principales. Otras aplicaciones pueden encontrarse en geofísica y análisis cuantitativo del relieve.
- (iv) Una variante del caso anterior resulta de considerar la variable escalar como variable primaria

y la derivada direccional como variable secundaria. De este modo es posible tener en cuenta las condiciones de contorno en la estimación de la variable escalar de interés. Las condiciones de contorno se introducen mediante derivadas direccionales que se incluyen como variable secundaria en el sistema de cokrigaje.

Desagregación espacial por cokrigaje

El problema de fusión de imágenes en teledetección puede considerarse como un problema de desagregación espacial en el cual se pretende incrementar la resolución espacial de una banda espectral de baja resolución utilizando dicha banda y otra banda espectral diferente de mayor resolución espacial. El estimador de la ecuación (1) se puede escribir de nuevo teniendo en cuenta la importancia del soporte (tamaño de píxel o resolución espacial) de la información experimental:

$$Z_v^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 Z_V(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j^0 Y_v(\mathbf{u}_j), \quad (19)$$

donde v es el soporte de alta resolución y V es el soporte de baja resolución, esto es se cumple la relación:

• $\bullet < v < V$, siendo \bullet un soporte cuasi-puntual. El sistema de cokrigaje que proporciona los pesos en la ecuación (19) es similar al dado en las ecuaciones (12) a (14) pero teniendo en cuenta el soporte lo que da lugar por ejemplo a la siguiente matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_Z^{vv}(\mathbf{h}_{10}) \\ \vdots \\ C_Z^{vv}(\mathbf{h}_{n0}) \\ C_{ZY}^{vv}(\mathbf{h}_{10}) \\ \vdots \\ C_{ZY}^{vv}(\mathbf{h}_{m0}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$C_Z^{vv}(\mathbf{h}_{10})$ es la covarianza entre las variables aleatorias $Z_v(\mathbf{u}_1)$ y $Z_v(\mathbf{u}_0)$ y $C_{ZY}^{vv}(\mathbf{h}_{10})$ es la covarianza entre las variables aleatorias $Z_v(\mathbf{u}_1)$ e $Y_v(\mathbf{u}_0)$. La variable aleatoria $Z_v(\mathbf{u}_0)$ no ha sido observada luego las covarianzas en la matriz de la ecuación (20) no pueden estimarse experimentalmente. La solución propuesta en Pardo-Igúzquiza et al. (2006) y Atkinson et al. (2008) es una técnica numérica de convolución y deconvolución. El método consiste en proponer modelos de covarianza sobre soporte puntual $C_Z^*(\mathbf{h}_{10})$ que se introducen en la ecuación (Matheron, 1962):

$$\tilde{C}_Z^{VV}(\mathbf{h}) = C_Z^{**}(\mathbf{h}) * \rho_V(\mathbf{h}), \quad (21)$$

que produce un modelo de covarianza inducido $\tilde{C}_Z^{VV}(\mathbf{h})$ y que puede compararse con la covarianza experimental $\tilde{C}_Z^V(\mathbf{h})$. En la ecuación (21), $\rho_V(\mathbf{h})$ es el covariograma geométrico de Matheron (1975) y $*$ es el operador de convolución. El procedimiento iterativo consiste en encontrar el modelo de covarianza sobre soporte puntual que minimice la diferencia entre el modelo de covarianza inducido y experimental sobre el soporte V en la ecuación (21). Una vez conocido la covarianza (variograma) sobre soporte puntual es posible obtener la covarianza en cualquier otro soporte por regularización siendo por consiguiente posible el calcular todas las covarianzas requeridas en el sistema de cokrigaje. Un programa de ordenador para desagregación por cokrigaje puede encontrarse en Pardo-Igúzquiza *et al.* (2010).

Cokrigaje como solución geoestadística del problema inverso en hidrogeología

El mapa de cokrigaje de transmisividad a partir de transmisividad y piezometría y utilizando la covarianza cruzada impuesta por las condiciones hidrodinámicas es la solución geoestadística del problema inverso (Hoeksema y Kitanidis, 1984; Dagan, 1985; Ahmed y De Marsily, 1993). En este sistema de cokrigaje, la covarianza cruzada ha de tener en cuenta la ecuación de flujo subterráneo en régimen permanente y en ausencia de recargas o extracciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Y(\mathbf{u}) \frac{\partial Z(\mathbf{u})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Y(\mathbf{u}) \frac{\partial Z(\mathbf{u})}{\partial y} \right) = 0, \quad (22)$$

así como el tipo de condiciones de contorno.

Dagan (1985), considerando un acuífero con dominio infinito, con un nivel piezométrico $Z(\mathbf{u})$ con una deriva lineal a lo largo de uno de sus ejes principales y una covarianza exponencial para el logaritmo de la transmisividad $Y(\mathbf{u}) = \ln(T(\mathbf{u}))$, encuentra que la covarianza cruzada $C_{YZ}(\mathbf{h})$ vale:

$$C_{YZ}(\mathbf{h}) = \sigma^2 \beta_2 \ell \frac{h}{h^2} [1 - (1 + h) \exp(-h)], \quad (23)$$

donde σ^2 y ℓ son la varianza y el alcance de la covarianza exponencial de log-transmisividad, esto es, $C_Y(\mathbf{h}) = \sigma^2 \exp(-h/\ell)$. Asimismo $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = \left(\frac{x_1 - x_2}{\ell}, \frac{y_1 - y_2}{\ell} \right)$ es el vector de distancia estandarizado por el alcance. Por

otro lado, $h = |\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ es la magnitud del vector de distancia estandarizado y \mathbf{h} es el vector de distancia entre dos localizaciones experimentales. Para la variable nivel piezométrico se asume una tendencia lineal del tipo $m(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x$, esto es, este-oeste.

Cokrigaje para estimación de derivadas direccionales

Para la estimación de la derivada direccional de una función aleatoria espacial $Z(\mathbf{u})$ es conveniente extender el modelo básico de la ecuación (2) para diferenciar el componente estocástico residuo $R(\mathbf{u})$ en dos componentes: una componente estocástica correlacionada $\tilde{R}(\mathbf{u})$ y una componente estocástica no correlacionada (conocida como ruido blanco en análisis de señales) $N(\mathbf{u})$. De este modo el modelo geoestadístico de una variable espacial $Z(\mathbf{u})$ se considera con tres componentes:

$$Z(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) + \tilde{R}(\mathbf{u}) + N(\mathbf{u}), \quad (24)$$

donde $m(\mathbf{u})$, $\tilde{R}(\mathbf{u})$ y $N(\mathbf{u})$ han sido definidos previamente. Se asume ausencia de correlación cruzada entre los diferentes componentes.

La componente estocástica no correlacionada $N(\mathbf{u})$ es una función aleatoria de media cero sin correlación espacial. Esta es discontinua en todos los puntos, no diferenciable y representa la variabilidad asociada con una covarianza de pepita estacionaria de segundo orden:

$$C_N(\mathbf{h}) = \begin{cases} C_0 & |\mathbf{h}| = 0 \\ 0 & |\mathbf{h}| > 0 \end{cases}, \quad (25)$$

donde \mathbf{h} representa un vector de distancia entre dos localizaciones, $|\mathbf{h}|$ es su magnitud, esto es, un escalar. En las aplicaciones, la componente $N(\mathbf{u})$ estará presente si se identifica una varianza de pepita en el variograma (o covarianza) experimental.

La componente estocástica correlacionada $\tilde{R}(\mathbf{u})$ es una función aleatoria de media cero y con covarianza espacial $\tilde{C}(\mathbf{h})$. De modo que la correlación espacial de la función aleatoria $Z(\mathbf{u})$, y denotada por $C(\mathbf{h})$ viene dada por:

$$C(\mathbf{h}) = \begin{cases} C_0 + \tilde{C}(0) & |\mathbf{h}| = 0 \\ \tilde{C}(\mathbf{h}) & |\mathbf{h}| > 0 \end{cases}, \quad (26)$$

Se puede definir una función aleatoria continua y diferenciable, $\tilde{Z}(\mathbf{u})$, a partir de $Z(\mathbf{u})$ por el filtrado de la componente de pepita y dejando la parte continua y diferenciable:

$$\tilde{Z}(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) + \tilde{R}(\mathbf{u}), \quad (27)$$

cuya covarianza es $\tilde{C}(\mathbf{h})$. Para que $\tilde{Z}(\mathbf{u})$ sea diferenciable, la deriva $m(\mathbf{u})$ debe de ser diferenciable (Parzen, 1972), lo cual se cumple en el caso de una deriva polinomial. Un segundo requisito es que la covarianza $\tilde{C}(\mathbf{h})$ sea dos veces diferenciable lo cual restringe la familia de covarianzas permitidas. En particular, en esta contribución sólo se considerará una covarianza de tipo gausiano, aunque otros tipos de covarianza, como por ejemplo el modelo de Matérn (Pardo-Igúzquiza et al., 2009) también son apropiados.

Denotamos con $D_{\mathbf{e}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}$ la derivada direccional de $\tilde{Z}(\mathbf{u})$ a lo largo de la dirección descrita por el vector unitario $\mathbf{e} = \cos(\phi)\mathbf{i} + \sin(\phi)\mathbf{j}$ (donde ϕ es el ángulo en el sentido contrario de las agujas del reloj entre el eje de las X y el vector unitario \mathbf{e} , \mathbf{i} y \mathbf{j} son los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas X e Y). Dicha derivada direccional se define como:

$$D_{\mathbf{e}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{Z}(\mathbf{u} + h\mathbf{e}) - \tilde{Z}(\mathbf{u})}{h} \right]. \quad (28)$$

El gradiente de una función aleatoria escalar $\tilde{Z}(\mathbf{u})$, denotado por $\nabla\tilde{Z}(\mathbf{u})$, es un campo vectorial definido en cada punto \mathbf{u} por sus componentes:

$$\nabla\tilde{Z}(\mathbf{u}) = (D_{\mathbf{i}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}, D_{\mathbf{j}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}). \quad (29)$$

Hay una relación entre la derivada direccional y el gradiente dada por (Bradley y Smith, 1989; Meyer et al., 2001):

$$D_{\mathbf{e}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\} = \nabla\tilde{Z}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}, \quad (30)$$

donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es el producto punto entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

La magnitud del gradiente viene dada por:

$$|\nabla\tilde{Z}(\mathbf{u})| = \sqrt{(D_{\mathbf{i}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\})^2 + (D_{\mathbf{j}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\})^2}, \quad (31)$$

y su dirección viene dada por el ángulo θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{D_{\mathbf{j}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}}{D_{\mathbf{i}}\{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}} \right). \quad (32)$$

El método propuesto por Philip y Kitanidis (1989) consiste en estimar la derivada direccional $D_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\}$ en

cualquier localización arbitraria \mathbf{u}_0 , a lo largo de cualquier dirección arbitraria \mathbf{e}_0 por una combinación lineal de los datos de la variable de interés $Z(\mathbf{u})$ en la forma de:

$$\hat{D}_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 Z(\mathbf{u}_i), \quad (33)$$

donde $\hat{D}_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\}$ es el estimador de la derivada direccional $D_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\}$ en la posición espacial \mathbf{u}_0 según la dirección \mathbf{e}_0 utilizando n valores experimentales $Z(\mathbf{u}_i)$.

Si se tienen medidas directas del gradiente, es posible incluir estas medidas en el estimador mediante cokrigaje:

$$\hat{D}_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 Z(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j^0 D_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_j)\}, \quad (34)$$

donde m es el número de medidas directas del gradiente. Puede verse como la derivada direccional $D_{\mathbf{e}_0}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\}$ es equivalente a la información secundaria $Y(\mathbf{u})$ en la ecuación (1).

Se puede mostrar que sin importar cuantas medidas directas del gradiente se disponen (incluso si ese número es el menor posible, esto es, una) se pueden incluir eficientemente en el estimador de cokrigaje expresado en la Ecuación (34). Esto es así porque las covarianzas (o variogramas) y las covarianzas cruzadas (o variogramas cruzados) que se necesitan se pueden obtener a partir de la covarianza estimada de las medidas de la variable utilizando resultados clásicos de la teoría de sistemas lineales como se verá mas adelante.

La idea de estimar el gradiente por krigaje ordinario se encuentra en Philip y Kitanidis (1987). El método se extiende aquí a cokrigaje en orden a tener en cuenta la deriva o tendencia que es usual observar en muchas variables espaciales a escala regional. Tal es el caso, por ejemplo, del nivel piezométrico en un acuífero, lluvia en una zona de topografía accidentada, tendencia en variables geofísicas asociadas con la geometría de una cuenca sedimentaria, etc. Adicionalmente, el método propuesto permite, a partir de la covarianza de la variable, obtener la covarianza de la derivada direccional y la covarianza cruzada de la derivada direccional con la variable inicial, sin necesidad de tener medidas directas de gradiente. Sin embargo, alguna medida del gradiente es necesaria si se quiere utilizar cokrigaje.

El cokrigaje universal se puede encontrar en la literatura geoestadística clásica (Goovaerts, 1997; Olea, 1999; Chiles y Delfiner, 1999) y aquí se presentarán los resultados originales al estar utilizando el cokrigaje para estimar una magnitud vectorial (Philip and Kitanidis, 1989; Pardo-Igúzquiza y Chica-Olmo, 2004, 2007).

Las condiciones de no sesgo para el estimador de cokrigaje dado en la Ecuación (34) son:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_\ell(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^m w_j D_{\mathbf{e}_j} \{f_\ell(\mathbf{u}_j)\} = D_{\mathbf{e}_0} \{f_\ell(\mathbf{u}_0)\} \quad (35)$$

; $\ell = 1, \dots, L$,

y la varianza de estimación vale:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{D}_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\} - D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u}_0)\}\} \\ = \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\mathbf{h}_{ij}) + \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m w_k w_\ell \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{k\ell}) \quad (36) \\ + 2 \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \lambda_s w_t \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{st}) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{i0}) - 2 \sum_{j=1}^m w_j \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{j0}), \end{aligned}$$

donde $D_{\mathbf{e}_0} \{f_\ell(\mathbf{u}_0)\}$ es la derivada direccional de las funciones de base $f_\ell(\cdot)$ evaluadas a lo largo de la dirección \mathbf{e}_0 en la posición \mathbf{u}_0 . $C(\mathbf{h})$ es covarianza de $Z(\mathbf{u})$. $\tilde{C}(\mathbf{h})$ es la covarianza de $\tilde{Z}(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) + r(\mathbf{u})$, esto es, la covarianza $C(\mathbf{h})$ pero sin la varianza de pepita. $\tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}) = \text{Cov}\{D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u})\}, D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u} + \mathbf{h})\}\} = -D_{\mathbf{e}_0}^2 \{\tilde{C}(\mathbf{h})\}$ es la covarianza de la derivada direccional de la función aleatoria y que es igual a menos la segunda derivada direccional de la derivada de la covarianza $\tilde{C}(\mathbf{h})$ y finalmente $\tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}) = \text{Cov}\{\tilde{Z}(\mathbf{u}), D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u} + \mathbf{h})\}\} = -D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{C}(\mathbf{h})\}$ es la covarianza cruzada de la función aleatoria $\tilde{Z}(\mathbf{u})$ y su derivada direccional, la cual es igual a menos la derivada direccional de la covarianza $\tilde{C}(\mathbf{h})$.

Los últimos dos resultados son clásicos en la teoría de sistemas lineales (Parzen, 1972; Papoulis, 1984). Puede concluirse por tanto que sólo se requiere la inferencia de la covarianza $\tilde{C}(\mathbf{h})$ de la variable escalar.

Los pesos óptimos en la Ecuación (34) se obtienen minimizando la varianza de estimación (Ecuación 36) sujeto a las condiciones de ausencia de sesgo (Ecuación 35). Así se obtiene el llamado sistema de cokrigaje, que se puede expresar en forma matricial como:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_n^0 \\ \beta_1^0 \\ \vdots \\ \beta_m^0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^* \{\mathbf{h}_{10}\} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^* \{\mathbf{h}_{n0}\} \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**} \{\mathbf{h}_{10}\} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**} \{\mathbf{h}_{m0}\} \\ D_{\mathbf{e}_0} \{f_1(\mathbf{u}_0)\} \\ \vdots \\ D_{\mathbf{e}_0} \{f_L(\mathbf{u}_0)\} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Cokrigaje para estimación de una variable escalar teniendo en cuenta condiciones de contorno de no flujo

En cokrigaje se puede estimar cualquiera de las variables, la primaria o la secundaria. Así la misma ecuación de cokrigaje (34) se puede utilizar para estimar la variable escalar teniendo en cuenta condiciones de contorno a través de derivadas direccionales. El nuevo estimador de cokrigaje se expresa como:

$$\tilde{Z}^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 Z(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j^0 D_{\mathbf{e}_0} \{\tilde{Z}(\mathbf{u}_j)\}, \quad (39)$$

donde los pesos en ecuación (39) son diferentes de los pesos en ecuación (34) puesto que los sistemas de cokrigaje son diferentes.

Por ejemplo la matriz \mathbf{B} se define como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & C(\mathbf{h}_{1n}) & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{1m}) & f_1(\mathbf{u}_1) & \cdots & f_L(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{h}_{n1}) & \cdots & C(\mathbf{h}_{nn}) & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{n1}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{nm}) & f_1(\mathbf{u}_n) & \cdots & f_L(\mathbf{u}_n) \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{1n}) & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{11}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{1m}) & D_{\mathbf{e}_0} \{f_1(\mathbf{u}_1)\} & \cdots & D_{\mathbf{e}_0} \{f_L(\mathbf{u}_1)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{m1}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*(\mathbf{h}_{mn}) & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{m1}) & \cdots & \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^{**}(\mathbf{h}_{mm}) & D_{\mathbf{e}_0} \{f_1(\mathbf{u}_m)\} & \cdots & D_{\mathbf{e}_0} \{f_L(\mathbf{u}_m)\} \\ f_1(\mathbf{u}_1) & \cdots & f_1(\mathbf{u}_n) & D_{\mathbf{e}_0} \{f_1(\mathbf{u}_1)\} & \cdots & D_{\mathbf{e}_0} \{f_1(\mathbf{u}_m)\} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L(\mathbf{u}_1) & \cdots & f_L(\mathbf{u}_n) & D_{\mathbf{e}_0} \{f_L(\mathbf{u}_1)\} & \cdots & D_{\mathbf{e}_0} \{f_L(\mathbf{u}_m)\} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{C}\{\mathbf{h}_{10}\} \\ \vdots \\ \tilde{C}\{\mathbf{h}_{n0}\} \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*\{\mathbf{h}_{10}\} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{\mathbf{e}_0}^*\{\mathbf{h}_{m0}\} \\ f_1(\mathbf{u}_0) \\ \vdots \\ f_L(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} \quad (40)$$

La condición de contorno de ausencia de flujo se introduce, por ejemplo, imponiendo que la derivada direccional perpendicular al contorno vale cero. La implementación de esta metodología puede verse en detalle en Kuhlman y Pardo-Igúzquiza (2010).

Caso de estudio

En esta sección se ilustran las diferentes facetas del cokrigaje previamente revisadas en aplicaciones hidrogeológicas. El área de aplicación es el acuífero detrítico de la Vega de Granada en el sur de España. Se trata de un acuífero libre que tiene una superficie aproximada de 200 km² y se engloba dentro de la cuenca hidrográfica del Alto Genil (Figura 2A) que a su vez es una subcuenca de la cuenca fluvial del

Guadalquivir. Desde el punto de vista geológico está constituido por materiales cuaternarios de tipo fluvial (Castillo, 1989; Luque-Espinhar, 2001) que forman parte de la Depresión de Granada (Figura 2B).

La figura 3 muestra la imagen de satélite de la Vega de Granada tomada por el sensor ETM+ del satélite Landsat-7. La imagen 3A corresponde a la banda 1 (canal azul) con baja resolución espacial (píxel de 30 m de lado) y la imagen 3B corresponde a la banda 8 (pancromática) de alta resolución espacial (píxel de 15 m de lado).

La figura 4A muestra el variograma experimental de la banda 8 y el modelo inducido mediante deconvolución utilizando la ecuación (21) para estimar el modelo de variograma con soporte puntual para dicha banda. Este mismo proceso se repite para las bandas multiespectrales 1, 2 y 3 así como para las covarianzas cruzadas entre las bandas multiespectrales y la banda pancromática. En este proceso se obtienen los modelos de variograma con soporte puntual para las bandas multiespectrales y la pancromática. Con estos modelos puntuales ya es posible completar los sistemas de cokrigaje que permiten obtener imágenes de las bandas multiespectrales (1, 2, 3) con la misma resolución que la banda pancromática. Una vez hecho esto, con las imágenes de alta resolución se pueden obtener composiciones como la de falso color mostrada en la figura 4B y que puede utilizarse en diferentes aplicaciones ambientales.

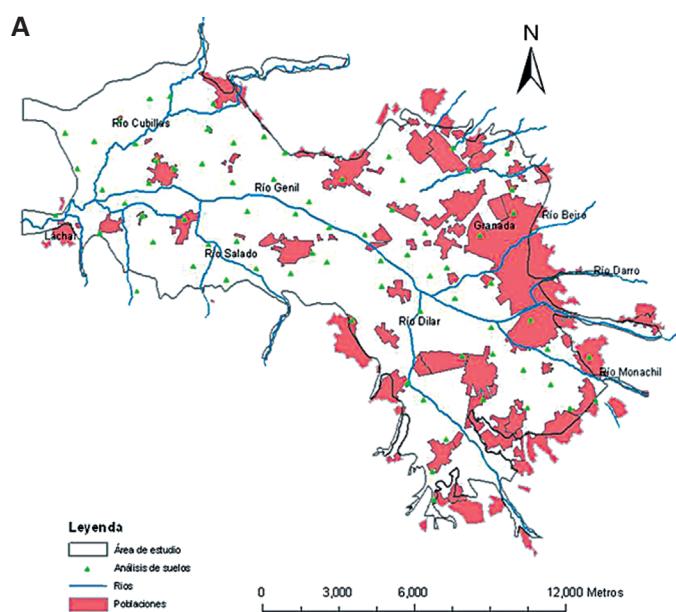
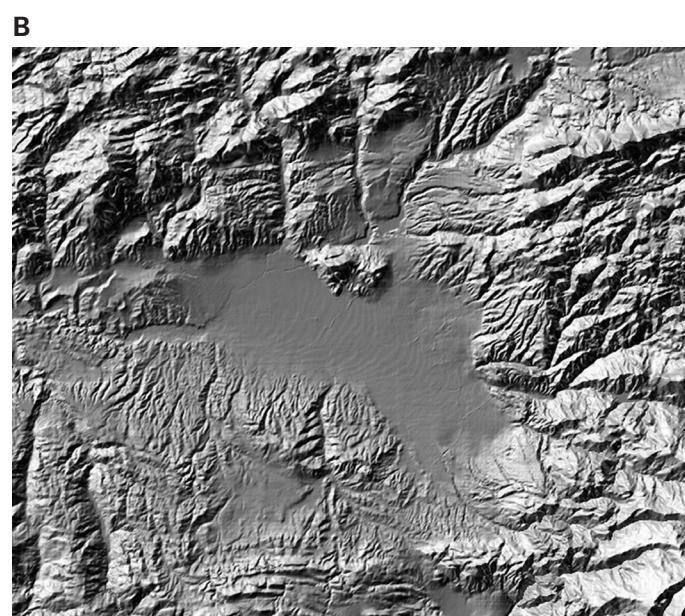


Figura 2. A: Red hidrográfica y poblaciones en el acuífero de la Vega de Granada. Obsérvese el río Genil que discurre por el centro de la vega en dirección este-oeste y donde se localizan las mayores transmisividades. B: imagen de sombras de relieve donde puede verse claramente el acuífero de la Vega de Granada como un relleno de una depresión intramontañosa.

Figure 2. A: Drainage network and towns in the Vega de Granada aquifer. The Genil river flows from east to west through the middle of the area, where the highest transmissivities are found. B: Image showing terrain shadows where the Vega de Granada aquifer can be seen as an intramountain basin.



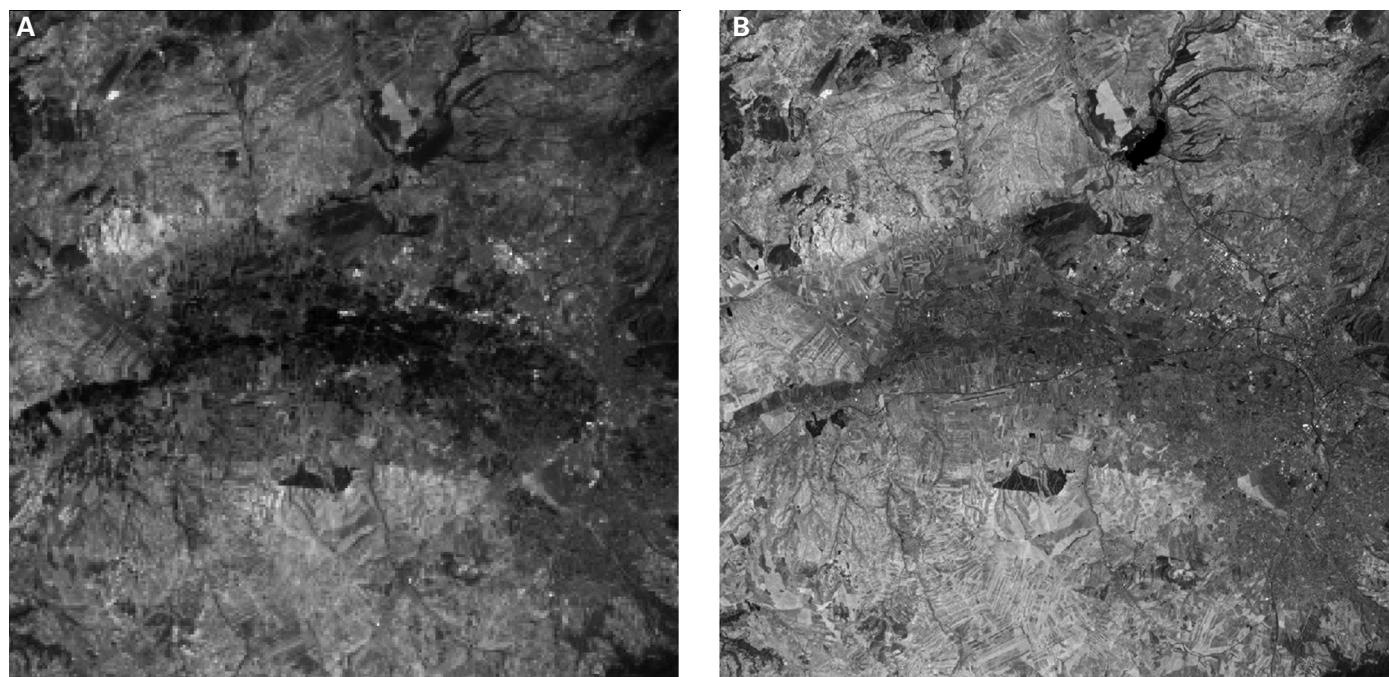


Figure 3. A: Imagen tomada por el sensor ETM+ a bordo del satélite Landsat-7 y que muestra la respuesta (cuantizada en el rango 0 a 255) de la Vega de Granada (radiación electromagnética reflejada) para el rango de frecuencias espectrales de 0.525 a 0.605 μm y que constituye la banda 2 de dicha imagen. La resolución espacial o longitud del lado del píxel cuadrado es de 30 m. B: Banda especial 8 o banda panchromática con un rango espectral de 0.52 a 0.90 y con resolución espacial de 15 m.

Figure 3. A: Satellite image taken by the ETM+ sensor on board Landsat-7 showing the quantized (gray scale from 0 to 255) spectral response of the Vega de Granada according to the electromagnetic radiation reflected in the spectral range of 0.525 to 0.605 μm , which corresponds to band 2 of ETM+. B: band 8 or panchromatic band, with a spectral resolution of 0.52 to 0.605 μm and spatial resolution of 15 m.

La Figura 5B muestra la distribución espacial de las medidas de transmisividad disponibles obtenidas a

partir de ensayos de bombeo. Puede verse como la mayor parte de las medidas se localizan en torno a

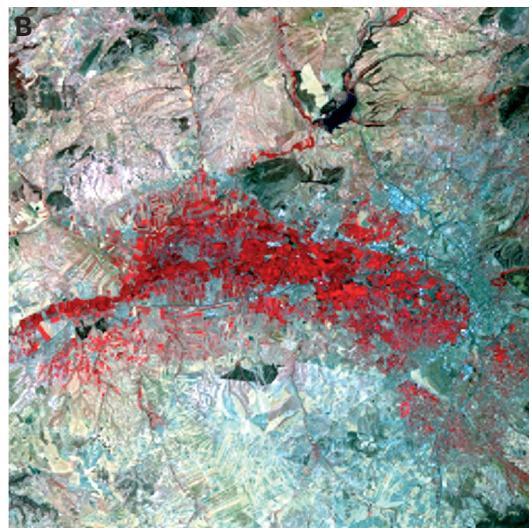
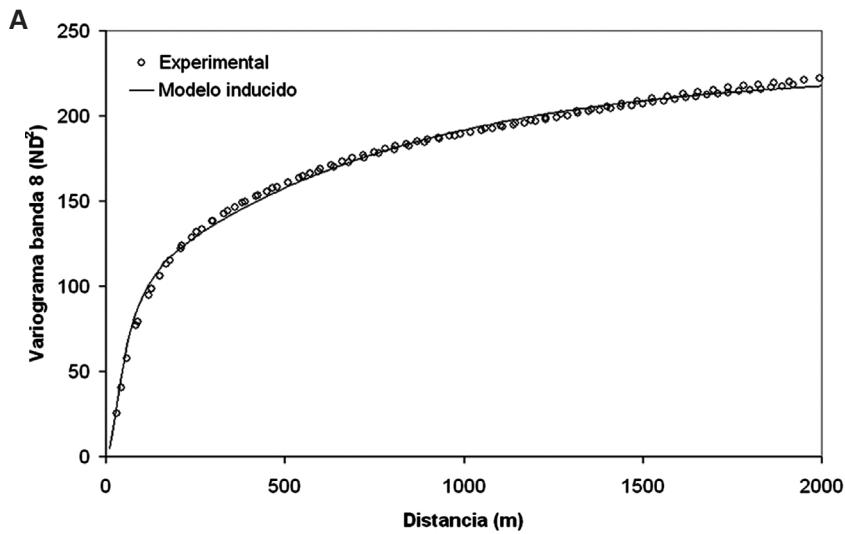


Figura 4. A: Variograma experimental de la banda panchromática y modelo inducido por el proceso de deconvolución en la estimación del modelo de variograma con soporte puntual para dicha banda. El modelo inducido es el que se obtiene al injectar el modelo puntual estimado en la Ecuación 21. B: Imagen de falso color de alta resolución obtenida como composición de las bandas (2, 3, 4) de alta resolución obtenidas por cokrigaje de cada banda multispectral y la banda panchromática.

Figure 4. A: Experimental variogram of the panchromatic band and the model resulting from the deconvolution process in the estimation of the point-support variogram. The induced model is the one obtained by injecting the estimated point-support model into Equation 21. B: False-colour image with a high spatial resolution obtained by combining the high-resolution bands 2, 3 and 4, which were in turn obtained by downscaling cokriging using the corresponding multispectral band and the panchromatic band.

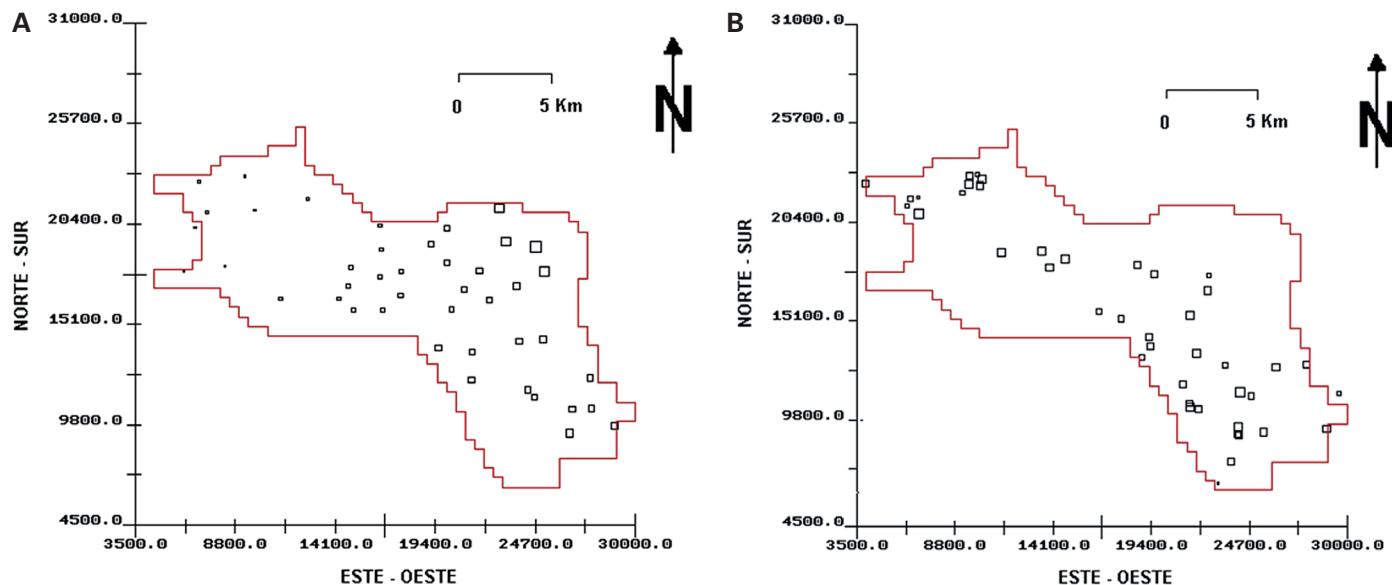


Figura 5. A: El acuífero de la Vega de Granada y la localización de 43 puntos acuíferos donde se ha medido la cota del nivel del agua subterránea B: el acuífero de la Vega de Granada y la localización de 42 localizaciones donde se han efectuado medidas de transmisividad. En ambos casos se ha representado pictogramas donde el área del cuadrado es proporcional al valor de la variable representada.
Figure 5. A: The Vega de Granada aquifer and the location of the 43 points where the level of the water table was measured. B: the Vega de Granada aquifer and the location of the 42 points where log-transmissivity was measured. Both figures are pictograms in which the value of the variable is proportional to the area of the mark.

la parte central del acuífero, por donde discurre el río Genil (Figura 2A) y donde se localizan los materiales más transmisivos. El variograma estimado de dichas medidas y el modelo ajustado se muestra en la Figura 4. El modelo ajustado es un modelo exponencial con varianza $\sigma^2 = 2.41$ y alcance $\ell = 2624$ m. Los parámetros del variograma se estiman por máxima verosimilitud por (Pardo-Igúzquiza, 1997) a partir de los contornos de isoverosimilitud como se muestra en la figura 7. Como puede verse tanto en la figura 5 como en la figura 7, el variograma experimental no muestra una estructu-

ra clara y existe una importante incertidumbre en los parámetros de cualquier posible modelo ajustado. El método de máxima verosimilitud es apropiado para evaluar la incertidumbre de los parámetros del modelo ajustado y su transmisión a la incertidumbre de los resultados de los modelos matemáticos de flujo. Pardo-Igúzquiza *et al.* (2009) ilustran esta evaluación y transmisión de incertidumbre. A partir de este mo-

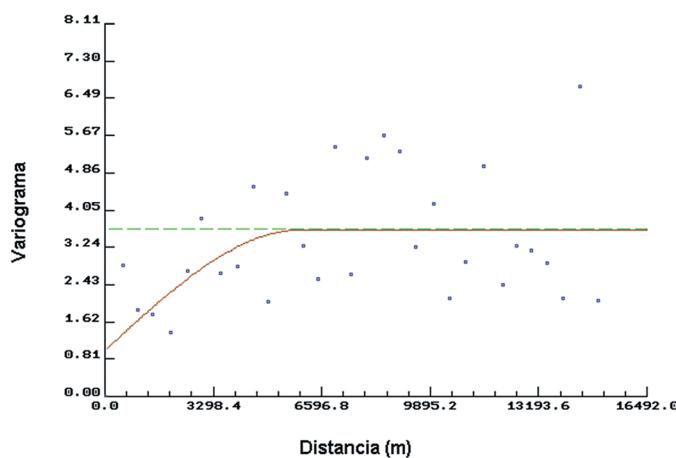


Figura 6. Variograma experimental de log-transmisividad y el modelo ajustado por máxima verosimilitud.

Figure 6. Experimental variogram of log-transmissivity and the model fitted by maximum-likelihood estimation.

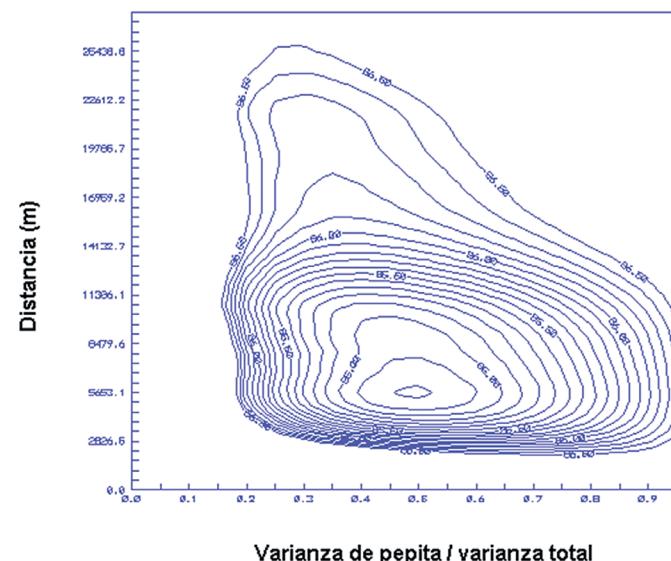


Figura 7. Estimación de los parámetros del variograma por máxima verosimilitud.

Figure 7. Estimation of the variogram parameters by maximum likelihood.

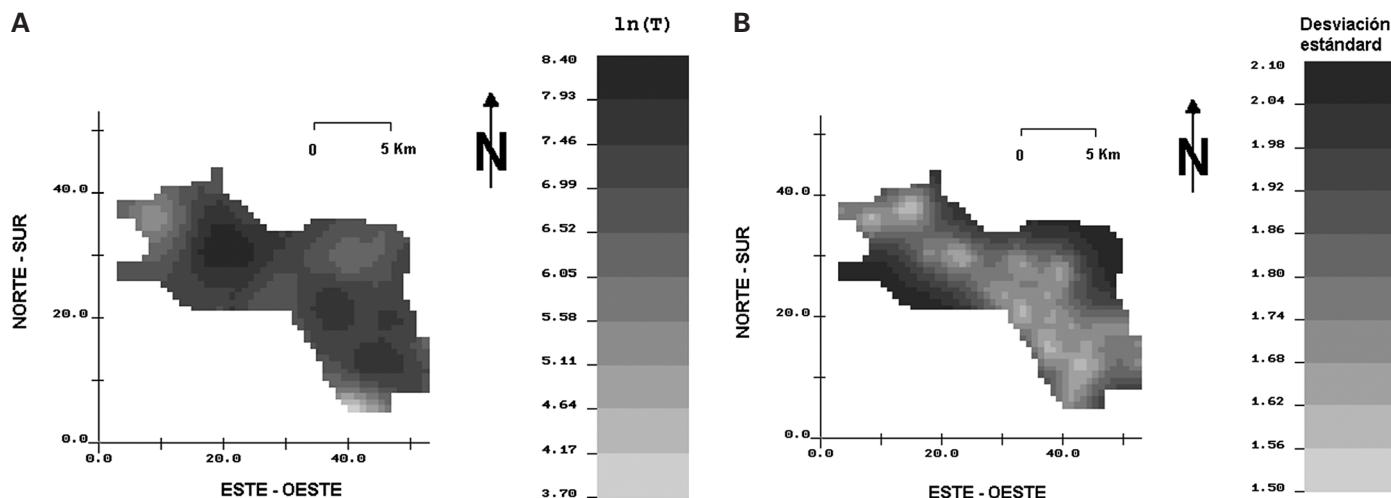


Figura 8. A: mapa de log-transmisividades estimadas por krigaje y B: mapa de desviación estandar de krigaje (raíz cuadrada de la varianza de estimación). Coordenadas locales de una malla de celdas de 500 m de lado.

Figure 8. A: Map of log-transmissivities estimated by kriging. B: Map of standard kriging deviation (square root of the estimation variance). Local co-ordinates with a grid spacing of 500 m along both the main X and Y axes.

delo (Figura 6) se puede estimar por krigaje el mapa de transmisividades que se muestra en la Figura 8A que lleva asociado el mapa de desviaciones estandar de krigaje que se muestra en la Figura 8B. En el mapa de transmisividades de la Figure 8A se pueden ver a grandes rasgos como la transmisividad disminuye hacia los bordes, aunque como puede verse en la Figure 8B son estas las zonas donde la varianza de estimación es mayor y por consiguiente más inciertos son los valores estimados.

Las medidas experimentales de nivel piezométrico para mayo de 1970 se muestran en la Figura 5A. Puede verse en dicha figura como existe una deriva o tendencia con el nivel piezométrico que disminuye hacia el oeste, y esta es por tanto la dirección principal de movimiento del agua subterránea (dirección del río Genil).

El variograma experimental del nivel piezométrico para las cuatro direcciones geográficas principales se muestra en la Figura 9A. La fuerte anisotropía que manifiesta el variograma experimental es fruto de la deriva presente. El significado físico de la deriva es el campo gravitacional (potencial) sobreimpuesto en la misma área y que mantiene la circulación del agua subterránea a nivel regional. La deriva y los parámetros de un variograma gausiano para el residuo se pueden estimar eficientemente utilizando el método de máxima verosimilitud (Pardo-Igúzquiza, 1997). El variograma omnidireccional del residuo junto con el modelo ajustado se muestran en la Figura 9B. El modelo ajustado es:

$$\tilde{C}(h) = 232 \exp\left(-\frac{h^2}{2600^2}\right), \quad (41)$$

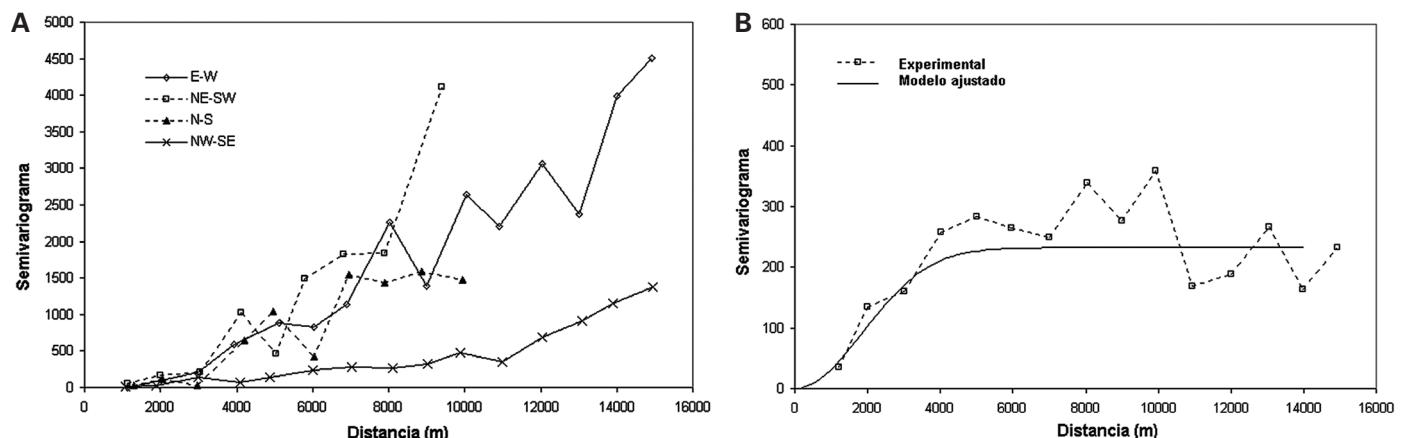


Figura 9. A: variogramas direccionales del nivel piezométrico de la Figura 3B. B: variograma omnidireccional del residuo y modelo ajustado por máxima verosimilitud.

Figure 9. A: Directional variograms of the water-head measurements shown in Figure 3B. B: Omnidirectional variogram of the residual and model fitted by maximum-likelihood estimation.

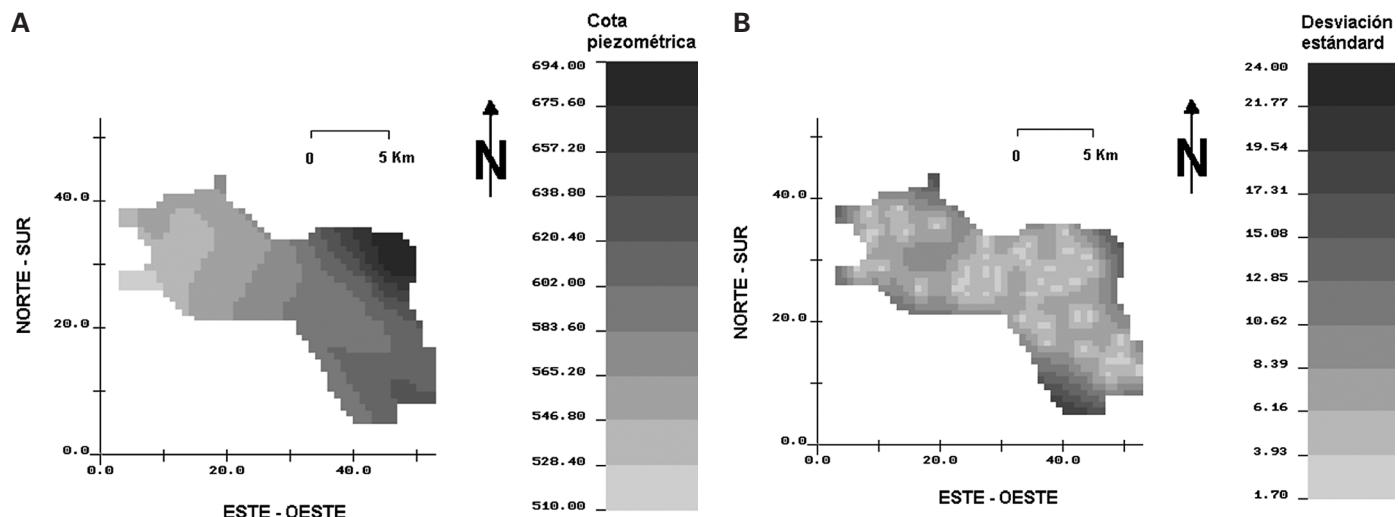


Figura 10. A: mapa de isopiezas estimadas por krigaje y B: mapa de desviación estandar de krigaje. Coordenadas locales de una malla de celdas de 500 m de lado.

Figure 10. A: Map of water-head level estimated by kriging. B: Map of standard kriging deviation (square root of the estimation variance). Local co-ordinates with a grid spacing of 500 m along both the main X and Y axes.

que representa un modelo gausiano con varianza de 232 m^2 y alcance de 2600 m. El mapa de nivel piezométrico se puede estimar por krigaje a partir del modelo dado en la ecuación (41) y los resultados pueden verse en la figura 10A para el mapa de nivel piezométrico estimado y la desviación típica del error de estimación se muestra en la figura 10B.

Para la estimación por cokrigaje a partir de medidas de log-transmisividad (Figura 5B) y de nivel piezométrico (Figura 5A) necesitamos como se ha dicho anteriormente una función de covarianza cruzada que tenga en cuenta las características hidrodinámicas

aplicables al acuífero de la Vega de Granada. Se ha tomado como adecuada la solución analítica de Dagan (1985) dada en la ecuación 23, donde las asunciones tenidas en cuenta para su obtención, son válidas para el acuífero Vega de Granada si este se rota 29° que es la dirección media del gradiente hidráulico y con $\beta_2 = 0.0061$, $\sigma^2 = 2.41$ y $\ell = 2624 \text{ m}$.

Con los parámetros anteriores, y modelando la variabilidad del nivel piezométrico con el modelo dado en la ecuación (41), es posible aplicar la estimación por cokrigaje para estimar la log-transmisividad, cuyos resultados obtenidos se dan en las Figuras

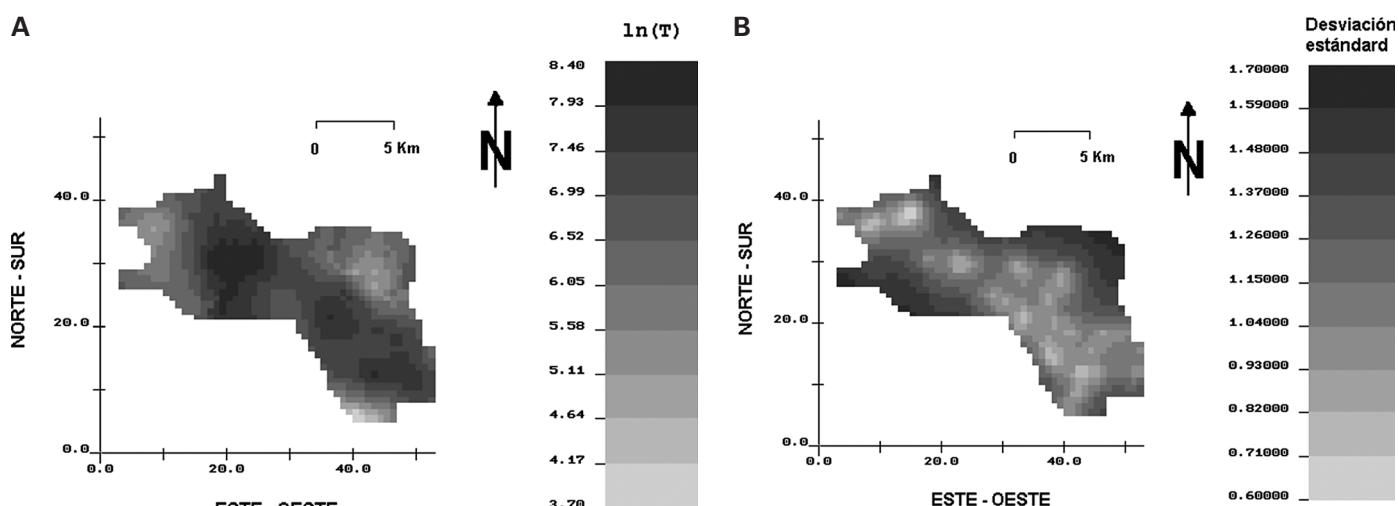


Figura 11. A: mapa de log-transmisividades estimadas por cokrigaje y B: mapa de desviación estandar de cokrigaje (raíz cuadrada de la varianza de estimación). El mapa que se muestra en A se puede considerar como una solución geoestadística del problema inverso. Coordenadas locales de una malla de celdas de 500 m de lado.

Figure 11. A: Map of water-head level estimated by cokriging. B: Map of standard kriging deviation (square root of the estimation variance). Local co-ordinates with a grid spacing of 500 m along both the main X and Y axes. The map shown in Figure A can be taken to be the geoestatistical solution to the inverse problem in hydrogeology.

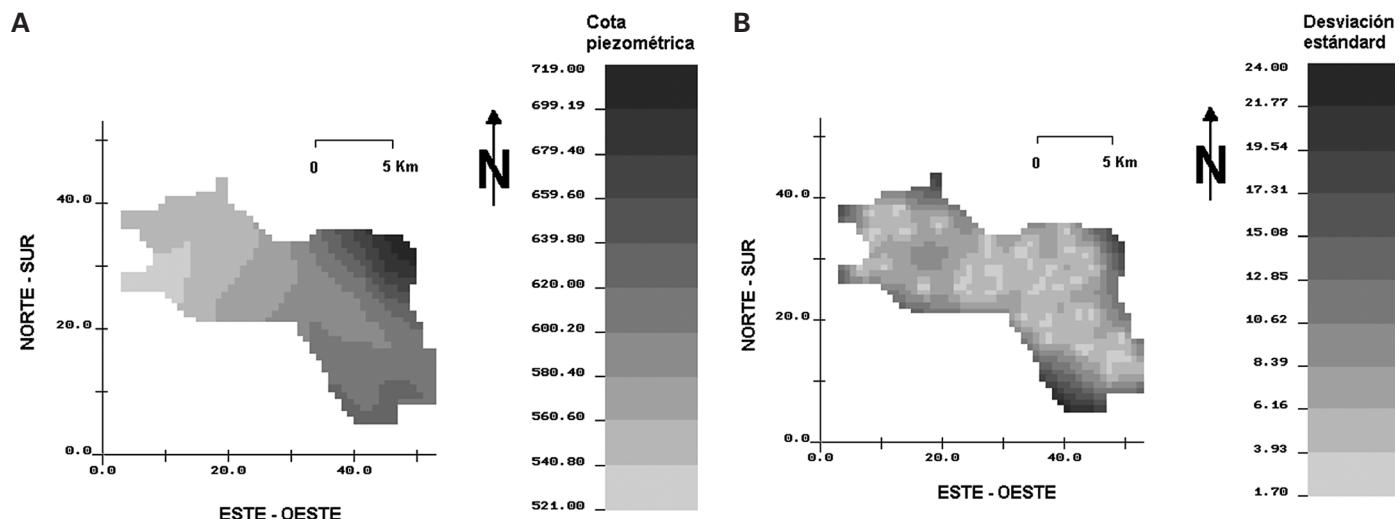


Figura 12. A: mapa del nivel piezométrico estimados por cokrigaje y B: mapa de desviación estandar de cokrigaje. Coordenadas locales de una malla de celdas de 500 m de lado.

Figure 12. A: Map of the water head estimated by cokriging. B: Map of standard kriging deviation (square root of the estimation variance). Local co-ordinates with a grid spacing of 500 m along both the main X and Y axes.

11A y 11B para el mapa de estimación y el mapa de desviaciones estándar de cokrigaje respectivamente. Comparando los mapas de las figuras 11A y 8A, puede verse como el mapa de cokrigaje de la figura 11A contiene mayor grado de detalle sobre la distribución espacial de log-transmisividades y como la desviación típica del error de estimación se ha reducido (comparando las figuras 11B y 8B). Del mismo modo anterior, es posible estimar el nivel piezométrico por cokrigaje obteniéndose los resultados mostrados en las Figuras 12A y 12B para el mapa de estimación y el mapa de desviaciones estándar de cokrigaje, respectivamente. Comparando las figuras 12B y 10B se

pude ver como se ha reducido la desviación estándar del error de estimación y por lo tanto el mapa de piezometría de la figura 10A debe estar más próximo a la realidad que el mapa mostrado en la figura 10A.

En cuanto a la estimación del gradiente, la estimación de la derivada direccional para la dirección este-oeste junto con la desviación estándar se muestra en las Figuras 13A y 13B respectivamente. Esta es la primera componente del vector gradiente hidráulico. Otra clase de resultados que se pueden obtener es el valor medio de la derivada direccional para todo el acuífero y para cada grado direccional como se muestra en la Figura 14A. El valor máximo ocurre para 29

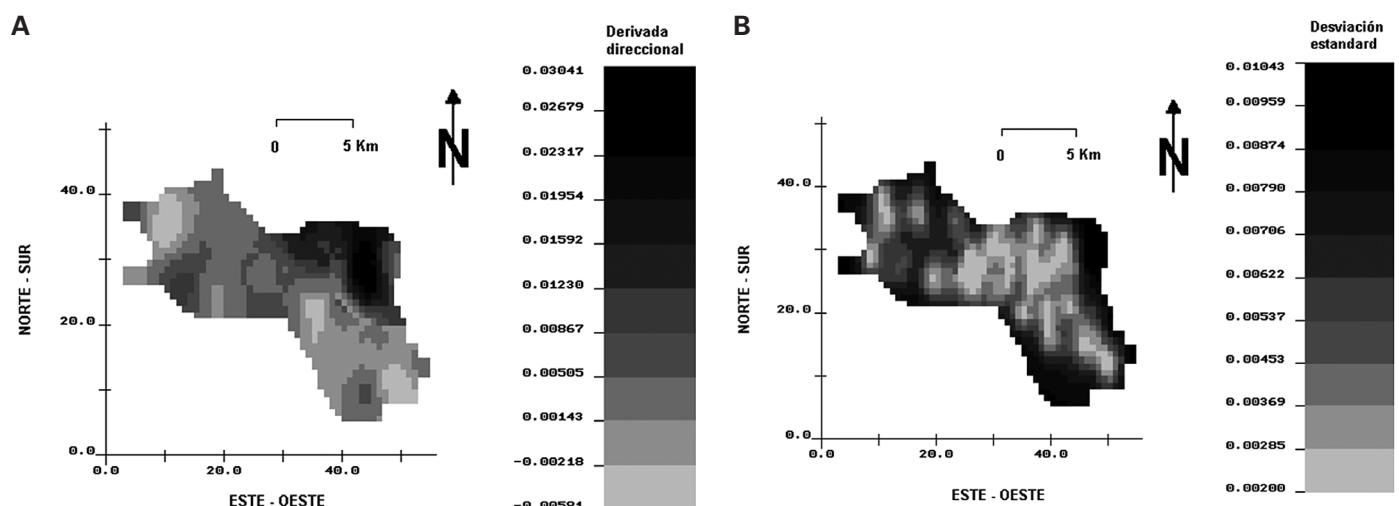


Figura 13. A: derivada direccional estimada para la dirección de 0 grados (dirección oeste-este). B: desviación estandar de krigaje del mapa estimado. Coordenadas locales de una malla de celdas de 500 m de lado.

Figure 13. A: Map of the estimates of the directional derivative from east to west (0°). B: Map of standard kriging deviation (square root of the estimation variance). Local co-ordinates with a grid spacing of 500 m along both the main X and Y axes.

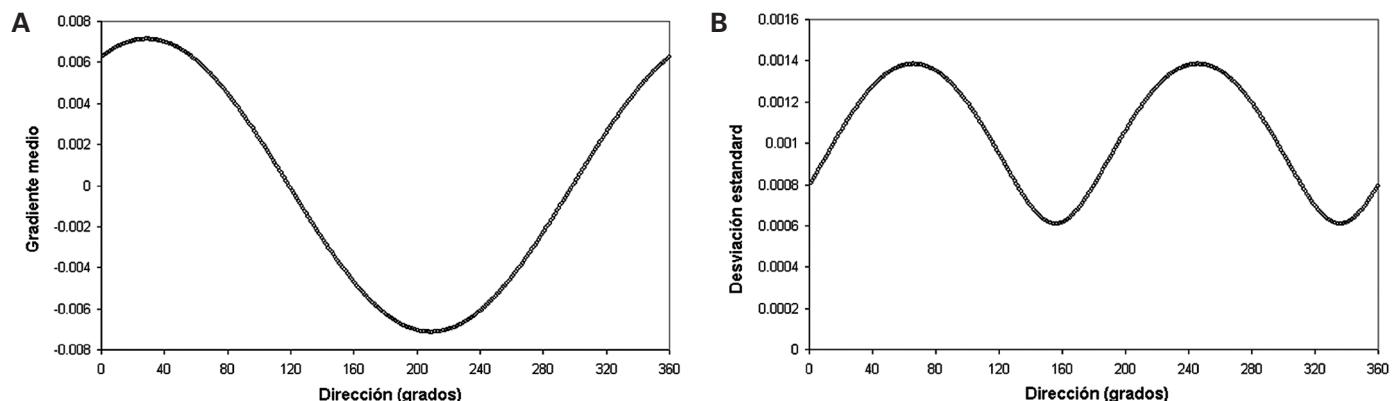


Figura 14. A: derivada direccional media para todo el acuífero. B: desviación estándar de krigageaje de la estimación mostrada en A.
Figure 14. A: Mean directional derivative for the whole aquifer. B: Standard kriging for the estimates shown in A.

grados con un valor de 0.00713, lo que implica, 7 metros de aumento del nivel piezométrico por cada 1000 metros de desplazamiento en la horizontal a lo largo de dicha dirección. Este es el valor medio del gradiente hidráulico para todo el acuífero. Otra representación es el mapa vectorial con el gradiente para todo el acuífero como se muestra en la Figura 15, en este caso se puede ver la variabilidad espacial del gradiente que está relacionado con la transmisividad del acuífero.

Con respecto a la aplicación del cokrigaje en la estimación de una variable escalar teniendo en cuenta condiciones de contorno, los resultados en la estimación del nivel piezométrico se muestran en las Figuras 16 y 17. En la Figura 16 se muestran los límites del acuífero de la Vega de granada distinguiendo bordes impermeables de no flujo (en rojo y con flechas indicando la dirección de las derivadas direccionales

nulas) y los bordes permeables (en azul). Los mapas interpolados sin tener en cuenta las condiciones de contorno (krigeaje) y considerando las condiciones de contorno (cokrigaje) se muestran en la Figuras 17A y 17B respectivamente. Si se comparan ambos mapas, se puede apreciar como las isopiezas se adaptan mejor a las condiciones de contorno (esto es, han de ser perpendiculares a los bordes impermeables) en el mapa obtenido por cokrigaje. Adicionalmente se podría mostrar como los errores de estimación también se han reducido al incluirse las condiciones de contorno.

Todos los mapas anteriores no tienen porque ser un fin en sí mismos sino que constituyen herramientas metodológicas que pueden utilizarse para diferentes estudios hidrogeológicos encaminados a la caracterización y gestión de los recursos hídricos del acuífero.

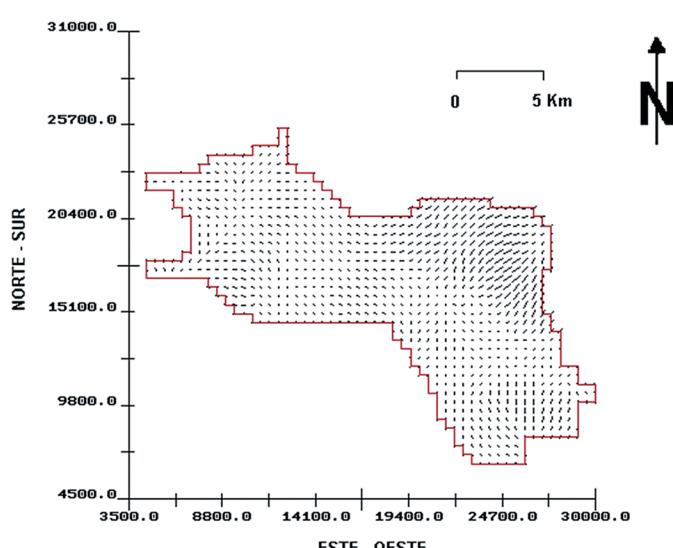


Figura 15. Mapa del gradiente hidráulico en el acuífero de la Vega de Granada.

Figure 15. Hydraulic gradient across the Vega de Granada aquifer.

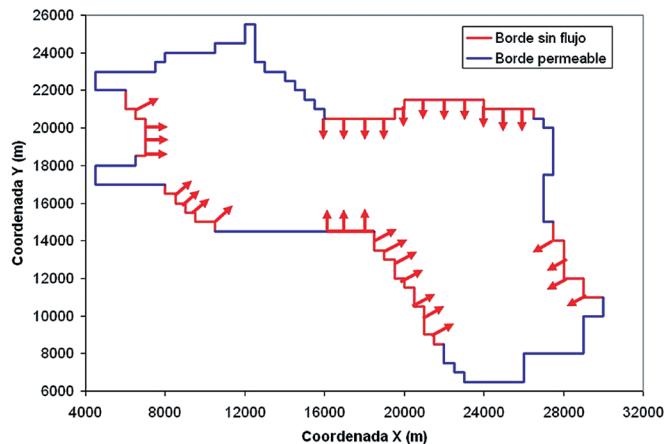


Figura 16. Condiciones de contorno en los bordes del acuífero de la Vega de Granada. Se ha indicado en rojo los bordes sin flujo. Las flechas indican la dirección de la derivada direccional que ha de ser cero. Las líneas azules representan bordes permeables.

Figure 16. Boundary conditions at the edges of the Vega de Granada aquifer. The red line represents the no-flow boundaries. The arrows indicate the direction of the null directional derivative. The blue lines represent the permeable borders.

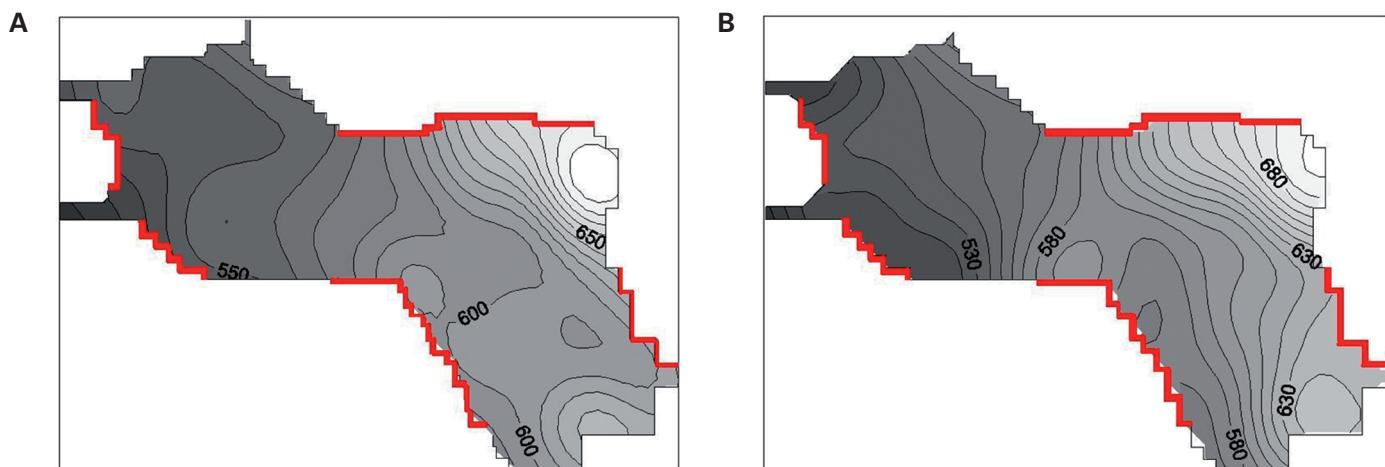


Figure 17. A: Mapa del nivel piezométrico obtenido por krigageaje teniendo en cuenta sólo los datos piezométricos. B: Mapa del nivel piezométrico obtenido por cokrigageaje teniendo en cuenta los datos piezométricos y las condiciones de contorno de no flujo. Puede apreciarse como las isopiezas se adaptan mejor a las condiciones de contorno impuestas en el mapa obtenido por cokrigageaje. Las líneas rojas representan los bordes impermeables.

Figure 17. A: Water-head map estimated by kriging, taking into account the water-head data only. B: Water-head map estimated by cokriging, taking into account the water-head data and the no-flow boundaries (directions of the null directional derivatives at the impermeable boundaries). It can be seen that the water-head isolines adapt better to the no-flow contours (i.e. isolines perpendicular to the boundary) in the cokriging map. The solid red lines represent the no-flow boundaries.

Discusión

La coestimación de la log-transmisividad utilizando como variable auxiliar el nivel piezométrico, es de gran interés ya que se trata de mejorar la estimación de una variable hidrodinámica difícil de cartografiar por el escaso número de ensayos de bombeo disponibles. Asimismo, se ha estimado tanto la distribución del gradiente para todo el acuífero como su valor medio. Todos estos parámetros son de gran interés para el conocimiento hidrogeológico del acuífero de la Vega de Granada y para estudios medioambientales relacionados con la calidad del agua subterránea de dicho acuífero. Es posible, asimismo, utilizar los resultados anteriores en la llamada hidrogeología estocástica (Gelhar, 1986) donde se obtienen resultados de aplicación general para el acuífero asumiendo que las variables hidrogeológicas son variables aleatorias y utilizando las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen el flujo y transporte de solutos en el medio poroso. Así por ejemplo la varianza de las fluctuaciones del nivel piezométrico se relacionan con los parámetros geoestadísticos del acuífero por la relación (Gelhar, 1986, ecuación 11):

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{2} J^2 \sigma_f^2 \lambda^2, \quad (42)$$

donde σ_h^2 es la varianza del residuo del nivel piezométrico y J es el gradiente hidráulico medio para el acuífero. σ_f^2 es la varianza de la log-transmisividad y λ es el alcance del variograma de la log-transmisividad.

Los valores estimados anteriormente para (J , σ_f^2 , λ) son (0.00713, 2.41, 2624) lo que aplicando la ecuación anterior da un valor de 281 para la varianza (desviación estándar 16.8) σ_h^2 mientras este mismo valor anteriormente se estimó como 232 (desviación estandar 15.2) los cuales son valores claramente comparables. Otros resultados de la hidrogeología estocástica dan la macrodispersión en el acuífero como función de parámetros geoestadísticos como los anteriores. Ello muestra el gran interés práctico de este tipo de análisis y sugerir una línea de investigación novedosa e interesante que requiere más atención y estudio futuro.

Conclusiones

El sistema de krigageaje ordinario, que tradicionalmente se ha utilizado para mejorar la estimación de una variable primaria utilizando valores de la propia variable más valores de una variable secundaria, puede modificarse atendiendo a diferentes aspectos como tener en cuenta el soporte de las variables o tener en cuenta la relación física entre las variables para solventar una serie de problemas de gran interés práctico. Entre estos problemas están:

- Desagregación por cokrigageaje aplicado en incrementar la resolución espacial de imágenes de satélite.
- Aproximación geoestadística al problema inverso en hidrogeología que permite obtener información sobre la transmisividad a partir de medidas del nivel piezométrico.

- Estimación de derivadas direccionales y del gradiente de una variable escalar con aplicaciones en hidrogeología, geofísica, análisis del terreno, etc.
- Estimación de una variable escalar teniendo en cuenta las condiciones de contorno del área de estudio como se ha ilustrado en la estimación del nivel piezométrico imponiendo bordes de ausencia de flujo en el acuífero.

La lista de aplicaciones no está cerrada ya que otras aplicaciones podrán surgir de la investigación futura.

Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado bajo los proyectos KARSTINV, referencia CGL2010-15498 y GEOSDA, referencia CGL 2010-17629.

Referencias

- Ahmed S. and De Marsily, G., 1993. Cokriged estimation of aquifer transmissivity as an indirect solution of the inverse problem: a practical approach. *Water Resources Research*, 29 (2), 521-530.
- Atkinson, P. M., Webster, R., & Curran, P. J. (1994). Cokriging with airborne MSS imagery. *Remote Sensing of Environment*, 50, 335-345.
- Atkinson P., Pardo-Igúzquiza, E. and Chica-Olmo, M., 2008. Downscaling cokriging for super-resolution mapping of continua in remotely sensed images. *TGARSTTransactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46 (2), 573-580.
- Bradley, G. L. and Smith, K. L., 1989. *Calculus*. Prentice Hall, 1239 p.
- Brochu, Y. and Marcotte, D., 2003. A simple approach to account for radial flow and boundary conditions when kriging hydraulic head fields for conditioned aquifers. *Mathematical Geology* 35 (2), 111-139.
- Castillo Martín, A. (1986). Estudio Hidroquímico del acuífero de la Vega de Granada. Servicio de Publicaciones. Universidad de Granada. 658 p.
- Chiles, J.-P., Delfiner, P., 1999. *Geostatistics: Modelling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York, 695 pp.
- Dagan, G., 1985. Stochastic modelling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities: the inverse problem. *Water Resources Research*, 21 (1), 65-72.
- Deutsch, C. V., and Journel, A. G., 1992, *GSLIB*. Geostatistical software library and user's guide: Oxford University Press, New York, 340 p.
- Doyen, P. M., 1988. Porosity from seismic data: A geostatistical approach. *Geophysics*, 53, 1263-1275.
- Gelhar, L. (1986). Stochastic subsurface hydrology: from theory to applications. *Water Resources Research*, 22 (9), 135S-145S.
- Goovaerts, P., 1997. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York, NY 483p.
- Goulard, M. and Voltz, M., 1992. Linear coregionalization model: tools for estimation and choice of cross-variogram matrix. *Mathematical Geology*, 24 (3), 269-286.
- Hoeksema R. J., Clapp R.B., Thomas A.L., Hunley A.E., Farrow N. D. and Dearstone K. C., 1989. Cokriging model for estimation of water table elevation. *Water Resources Research*, 25 (3), 429-438.
- Hoeksema R. J. and Kitanidis P. K., 1984. An application of the geostatistical approach to the inverse problem in two-dimensional groundwater modelling. *Water Resources Research*, 20 (7), 1003-1020.
- Isaaks, E. H., and Srivastava, R. M., 1989, *Applied Geostatistics*: Oxford University Press, New York, p. 561.
- Journel, A., y Huijbregts, C., 1978. *Mining Geostatistics*: Academic Press, New York, p. 600.
- Journel, A. G., 1983. Nonparametric estimation of spatial distributions. *Mathematical Geology*, 15 (3), 445-468.
- Kuhlman K. and Pardo-Igúzquiza E., 2010. Universal cokriging of hydraulic heads accounting for boundary conditions. *Journal of Hydrology*. 384 (1-2), 14-25
- Lesch, S. M., Strauss D. J. and Rhoades J. D., 1995. Spatial prediction of soil salinity using electromagnetic induction techniques: 1. Statistical prediction models: A comparison of multiple linear regression and cokriging. *Water Resources Research*, 31 (2), 373-386.
- Luque-Espinar, J. A., 2001. Análisis geoestadístico espaciotemporal de la variabilidad piezométrica. Aplicación a la Vega de Granada. Tesis Doctoral. Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. 313 p.
- Matheron, G., 1963. *Traité de Géostatistique Appliquée*. Tome 2. París, Editions Technip.
- Matheron, G., 1975. *Random sets and integral geometry*. Wiley & Sons. New York.
- Myers, D. E., 1982. Matrix formulation of co-kriging. *Mathematical Geology*, 14 (3), 249-257.
- Matheron, G., 1982. Pour une analyse krigante des données regionalisées, Rep. N-732, Centre de Géostatistiques, Fontainebleau, France, 21pp.
- Meyer, T. H., Eriksson, M. and Maggio, R. C., 2001. Gradient estimation from irregularly spaced data sets. *Mathematical Geology*, 33 (6), 693-717.
- Myers, D. E., 1983. Estimation of Linear Combinations and Co-Kriging. *Mathematical Geology*, 15 (5), 633-637.
- Myers, D. E., 1991. Pseudo-Cross Variograms, Positive-Definiteness, and Cokriging. *Mathematical Geology*, 23, (6), 805-816.
- Olea R. A., 1999. *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 303 p.
- Papoulis, A. (1984). *Probability, random variables and stochastic processes*. 2nd Edition. Singapore: McGraw-Hill International Editions.
- Pardo-Igúzquiza, E., 1997. MLREML: a computer program for the inference of spatial covariance parameters by maximum likelihood and restricted maximum likelihood. *Computers and Geosciences*, v. 23, no. 2, pp. 153-162.
- Pardo-Igúzquiza, E., 1998. Comparison of geostatistical methods for estimating the areal average climatological rainfall mean using information of precipitation and topography. *International Journal of Climatology*, v. 18, p. 1031-1047.

- Pardo-Igúzquiza, E., 1999. VARFIT: a Fortran-77 program for fitting variogram models by weighted least squares. *Computers and Geosciences*, v. 25, no.3, p. 251-261.
- Pardo-Igúzquiza, E. and Dowd, P. A., 2001. VARIOG2D: a computer program for the inference of the variogram and its uncertainty. *Computers and Geosciences*, v. 27, p. 549-561.
- Pardo-Igúzquiza, E. and Dowd, P. A., 2002. FACTOR2D: a computer program for factorial cokriging. *Computers and Geosciences*, 28, p. 857-875.
- Pardo-Igúzquiza, E. and Chica-Olmo, M., 2004. Estimation of gradients from sparse data by universal kriging. *Water Resources Research*, 40, W12418, pp. 1-17
- Pardo-Igúzquiza, E. and Dowd, P.A., 2005. Multiple indicator cokriging with application to optimal sampling for environmental monitoring. *Computers and Geosciences*, 31, (1), p. 1-13.
- Pardo-Igúzquiza, E., Chica-Olmo, M. and Atkinson P., 2006. Downscaling cokriging for image sharpening. *Remote Sensing of Environment*, 102, 86-98.
- Pardo-Igúzquiza, E. and Chica-Olmo, M., 2007. KRIGRADI: a cokriging program for estimating the gradient of spatial variables from sparse data. *Computers and Geosciences*, v. 33 (4), p. 497-512.
- Pardo-Igúzquiza E., Chica-Olmo M. and Mardia K. V., 2009. MLMATERN: A computer program for maximum likelihood inference with the spatial Matérn covariance model. *Computers & Geosciences*, 35, 1139-1150.
- Pardo-Igúzquiza E., Chica-Olmo M., Luque-Espinar, J. A., and García-Soldado, M.J., 2009. Using semivariogram parameter uncertainty in hydrogeological applications. *Groundwater*, 47 (1), 25-34.
- Pardo-Igúzquiza E., Atkinson P. M. and Chica-Olmo M., 2010. DSCOKRI: a library of computer programs for downscaling cokriging in support of remote sensing applications. *Computers & Geosciences*, *Computers & Geosciences*, 36, 881-894.
- Parzen, E., 1972. Stochastic Processes. Holden-Day Inc., San Francisco, (Spanish edition, Editorial Para info, Madrid), 370 p.
- Philip, R. D. and Kitanidis, P. K., 1989. Geostatistical estimation of hydraulic head gradients. *Ground Water*, 27, (6), 855-865.
- Remy N., Boucher A. and Wu J., 2009. Applied Geostatistics with SGeMS: A user's Guide, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 264 p.
- Rivoirard, J., 1994. Introduction to Disjunctive Kriging and Non- Linear Geostatistics. Oxford University Press, USA, 192 p.
- Wackernagel, H., 2003. Multivariate Geostatistics. An introduction with applications. 3rd revised edition. Springer Verlag, Berlín, 386 p.

Recibido: enero 2011

Revisado: mayo 2011

Aceptado: julio 2011

Publicado: octubre 2011

