

# Simplificaciones en la modelación de la intrusión marina: validez y alcance

M. Pool<sup>(1)</sup>, E. Abarca<sup>(1)</sup> y J. Carrera<sup>(2)</sup>

(1) Departamento de Ingeniería del Terreno Cartográfica y Geofísica, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), C/ Jordi Girona 1-3, Campus Norte, Edificio D2-004, 08034, Barcelona, España  
merypool@yahoo.es - abarca.elena@gmail.com

(2) Instituto Ciencias de la Tierra "Jaume Almera", C/ Lluís Sole i Sabaris s/n, 08028 Barcelona, España  
jcarrera@ija.csic.es

## RESUMEN

La modelación de la intrusión salina ha pasado de ser una herramienta para su comprensión a convertirse en una necesidad para la gestión, sin embargo continúa siendo un reto. A las dificultades inherentes en la modelación del transporte de contaminantes (estimación de los coeficientes de dispersión, complejidad de la geometría de los acuíferos y heterogeneidad en los parámetros hidráulicos), se suma la dependencia de la densidad con la concentración. Esta dependencia causa que el flujo y transporte estén acoplados y den lugar a un problema no-lineal. Las distribuciones heterogéneas de salinidad pueden estar causadas por factores tales como las variaciones en el espesor del acuífero, la heterogeneidad y la variación en la profundidad de los límites del acuífero, entre otros. En acuíferos homogéneos donde la extensión horizontal es elevada en comparación con el espesor, las variaciones en la topografía del fondo pueden convertirse en un factor crítico. La gravedad eficaz está controlada por la pendiente y forma de dicho fondo. Cuando la pendiente lateral es elevada, el flujo vertical puede llegar a ser varios órdenes de magnitud menor que el flujo lateral. La pendiente lateral conduce a un aumento drástico en la penetración de la interfaz, causada por el desarrollo de células de convección sub-horizontales. Estos efectos pueden ser cuantificados mediante un número adimensional de flotación lateral. Debido a que la componente principal de flujo es horizontal, uno esperaría que el flujo vertical fuera de orden menor y, por tanto, despreciable. Desafortunadamente, los flujos verticales producen mecanismos de mezcla que se pierden en el modelo bidimensional en planta. Esto implica discrepancias entre los resultados de los modelos 3D y los modelos 2D en planta. Estos mecanismos pueden ser aproximados por un término adicional en el tensor de dispersión a partir de la integración vertical de las ecuaciones 3D que gobiernan el fenómeno. El modelo 2D en planta resultante aproxima la dinámica tridimensional de la intrusión marina satisfactoriamente.

Palabras clave: *intrusión marina, modelación matemática, tensor de dispersión*

## ***Simplifications in modeling seawater intrusion: validity and scope***

### ABSTRACT

*Modeling seawater intrusion has evolved from a tool for understanding to a water management need, but it remains a challenge. Inherent difficulties of solute transport modeling (e.g., assessment of dispersion coefficients; three-dimensional complexity of aquifer geometries and heterogeneity in hydraulic parameters) are combined with the concentration dependence of density. This dependence causes flow and transport to become coupled and the resulting problem non-linear. Irregular patterns of salinity may be caused by many factor such as variable thickness formations, heterogeneity and variations in the depth of the aquifer boundaries, among others. In homogeneous aquifers where the horizontal extend is large compared to the constant thickness, aquifer topography may become critical. The effective gravity is controlled by the boundaries slope and shape. When the lateral slope is large, vertical flow can become of lesser order compared to the lateral flow. The lateral slope leads to a dramatic increase in seawater penetration, caused by the development of sub-horizontal seawater convection cells. These effects can be quantified by means of a lateral buoyancy dimensionless number. Since the main component of flow is horizontal, one would expect vertical flux to be of subleading order and thus negligible. Unfortunately, vertical fluxes produce mixing mechanisms that are lost in the simplified 2D areal model. This causes discrepancies between the results of 3D and 2D areal models. These mechanisms can be approximated by an additional term in the dispersion tensor that arises from vertical integration of the original 3D governing equations. The resulting 2D model approximates the 3D dynamics with satisfactory results.*

*Key words: Seawater intrusion, mathematical modelling, dispersion tensor*

## **Introducción**

Aunque el flujo con densidad variable no es especialmente complejo desde el punto de vista conceptual,

puede parecer que contradice los principios básicos del movimiento de un fluido. El ejemplo más conocido es el de la Isla de Cefalonia, en la que existe un canal que conduce el agua desde el mar hacia el inte-

rior, donde se pierde en una sierra. De hecho, esta fue una de las observaciones que llevó a los antiguos griegos a formular el ciclo hidrológico a la inversa de como hoy lo conocemos. Las explicaciones que se dieron a este fenómeno fueron diversas, algunas muy coloristas, y contribuyeron a crear un halo de misterio y dificultad en todo lo que rodea la intrusión marina. En realidad el fenómeno se explica teniendo presente que el agua de mar es un 2.5% más densa que el agua dulce. Esto implica que una columna de agua de mar de 100 m pese más que una de agua dulce de 102 m. Puestas en comunicación por la base, el agua tendería a fluir del mar al agua dulce. Es decir, cuando se trabaja con densidad variable, el agua ya no fluye "de arriba abajo".

En acuíferos costeros las diferencias de densidad provocan que el agua dulce flote sobre el agua del mar, dando lugar a un esquema de flujo como el de la Figura 1. Ghyben (1889) y Herzberg (1901) observaron que la profundidad del agua salada se correlaciona con el nivel de agua dulce. Suponiendo que no existe mezcla entre el agua salada y el agua dulce y que ambos fluidos están en equilibrio hidrostático, la presión de agua en A ( $P_A = \rho_d g(z+h)$ ) es igual a la presión en A' ( $P_{A'} = \rho_s g z$ ), y, por tanto, la profundidad a la que se encuentra la interfaz de agua dulce-agua salada,  $z$ , es  $\alpha_s z = h$ ; donde  $h$  es el nivel de agua dulce y  $\alpha_s = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d$  siendo  $\rho_s$  y  $\rho_d$  la densidad del agua del mar y agua dulce, respectivamente. A esta fórmula se la conoce como la aproximación de Ghyben-Herzberg para intrusión marina. Como  $\alpha_s$  es aproximadamente igual a 1/40, una regla frecuente es suponer que la profun-

didad de la interfaz por debajo del nivel del mar es 40 veces el nivel de agua dulce sobre el nivel del mar.

El tratamiento anterior supone el agua de mar y el agua dulce como dos fases distintas y la existencia de una interfaz brusca entre ellas. Sin embargo, ambos fluidos son miscibles, formándose una zona de mezcla cuya anchura depende básicamente de la dispersión. La dispersión provoca que la sal entre en la zona de mezcla, y de allí es arrastrada hacia el mar por el flujo de agua dulce. Para mantener el equilibrio es necesaria una realimentación de agua salina en el acuífero. Como resultado se genera una celda de convección vertical, en la cual el agua salina entra al acuífero en profundidad, se dispersa en la zona de mezcla y es devuelta al mar mediante la descarga de agua dulce (Figura 2). La hipótesis de que el agua de mar permanece estática de Ghyben-Herzberg ya no es válida, pues el flujo del agua de mar produce una pérdida de energía que se traduce en una menor penetración de la cuña de agua salina. Por lo tanto, la profundidad de la interfaz se subestima. Esta discusión indica que el movimiento de agua salada en los acuíferos costeros se debe a la combinación del flujo debido a variaciones de densidad y a la dispersión hidrodinámica. Este efecto convectivo y dispersivo fue descrito por primera vez por (Cooper, 1964).

Este problema fue analizado por Henry (1964), quien encontró una solución semianalítica para las líneas de corriente y la distribución de concentraciones. Aunque su solución ha sido mejorada (Segol, 1994), fue el primero en mostrar las líneas de corriente que reflejan la recirculación de agua salada en la celda vertical descrita anteriormente.

Sin embargo, en acuíferos costeros se observan habitualmente patrones de intrusión marina más complejos, que dan lugar a distribuciones heterogéneas de salinidad que no pueden explicarse con el paradigma bidimensional en sección expuesto anteriormente. Estas distribuciones irregulares pueden estar causadas por muchos factores tales como las variaciones en el espesor del acuífero, la heterogeneidad o la variación en la profundidad de los límites del acuífero. Algunos estudios geofísicos proporcionan pruebas de que el agua de mar penetra más en la parte más profunda de los acuíferos costeros (Flores-Marquez et al., 1998; Rangel-Medina et al., 2003; Benkabbour et al., 2004). Todo esto pone de manifiesto que la intrusión marina es un proceso complejo y 3D.

La modelación de la intrusión marina suma a las dificultades propias de la modelación del transporte de contaminantes (dispersión función de la escala, complejidad de la geometría de los acuíferos y heterogeneidad en los parámetros hidráulicos), la depen-

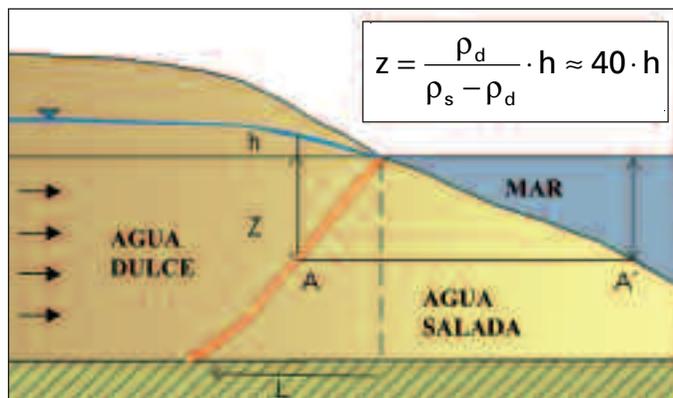


Fig. 1. Esquema de flujo en acuífero costero, una primera idea de la profundidad de la interfaz, ley cuantitativa de Ghyben (1889) y Herzberg (1901)

Fig. 1. Scheme of flow in a coastal aquifer, one first idea of the depth of the interface, quantitative law of Ghyben (1889) y Herzberg (1901)

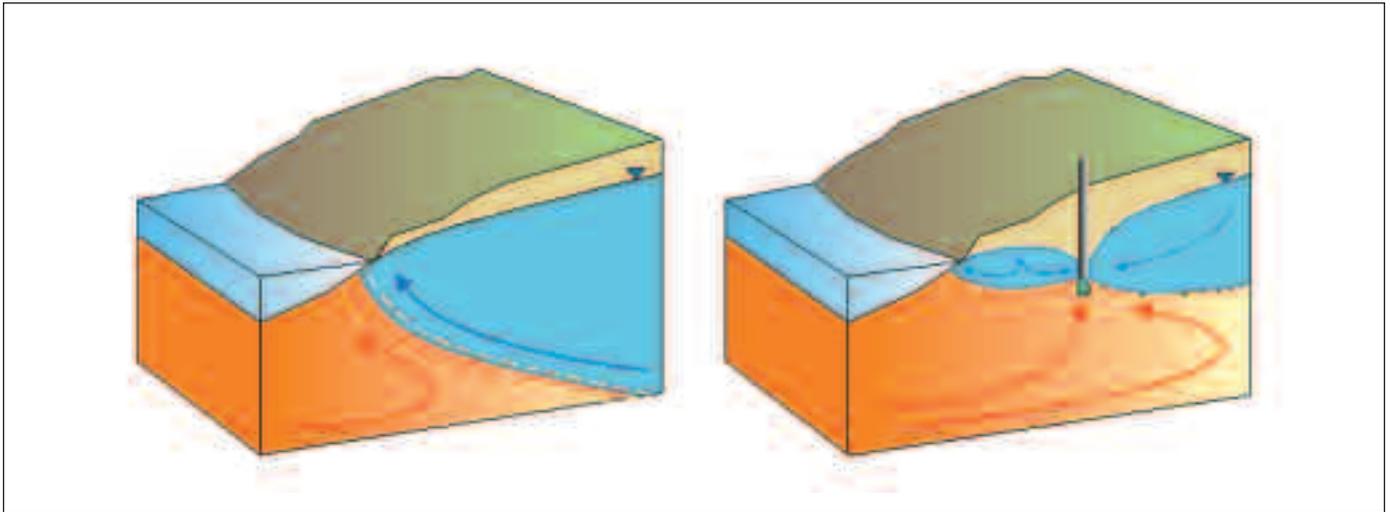


Fig. 2. Celda vertical de circulación de agua salina, izquierda, inducida por la combinación de fuerzas de flotabilidad y procesos de dispersión hidrodinámica. Avance de la interfaz salina, derecha, por el efecto de inversión del flujo natural inducido por extracciones  
 Fig. 2. Vertical saltwater circulation cell, left, induced by the combination of buoyancy forces and hydrodynamic processes. Advance of the interface, right, by the effect of inversion of the natural flow induced by extractions

dencia de la densidad con la concentración. Esta dependencia hace que flujo y transporte estén acoplados dando lugar a un problema no-lineal. Sería deseable representar al fenómeno de intrusión marina mediante modelos sencillos pero capaces de captar la esencia del problema. El objetivo de este artículo es explorar y discutir posibles simplificaciones conceptuales en la modelación de la intrusión marina. En primer lugar estudiamos el flujo de acuíferos con morfologías complejas que dan lugar a pautas de intrusión marina anómalas y cómo estas pautas pueden ser representadas mediante modelos simples. Sobre esta base discutimos simplificaciones que conllevan la reducción de las dimensiones del problema mediante integración vertical de la ecuación de flujo y transporte de solutos.

La integración vertical de las ecuaciones que gobiernan el proceso de intrusión marina ya ha sido objetivo de estudio. Wilson y Sa Da Costa (1982) presentaron una formulación para el cálculo del pie de la interfaz a partir de la integración en vertical de la ecuación de flujo asumiendo la aproximación de Dupuit. Bakker (2003) desarrolló una solución analítica basada también en la aproximación de Dupuit, capaz de describir el flujo tridimensional con densidad variable en sistemas multiacuífero, sin la necesidad de discretización vertical. Sin embargo ambos trabajos describen el fenómeno asumiendo la hipótesis de interfaz abrupta. Esta hipótesis no es válida en la mayoría de situaciones en las que el ancho de la zona de mezcla no es despreciable. En este artículo

no entraremos en la validez de esta hipótesis ya que consideramos que las ecuaciones que incluyen las variaciones de densidad del fluido describen el fenómeno de forma completa y, por tanto, la integración vertical propuesta tiene en cuenta dichas variaciones.

### Efecto de la tridimensionalidad

La tridimensionalidad puede ser un factor crítico a la hora de analizar los procesos de intrusión marina. El caso más sencillo que ilustra la importancia de la tridimensionalidad es suponer un acuífero de espesor variable (Figura 3). Suponiendo las condiciones de equilibrio hidrodinámico (aproximación de Ghyben-Herzberg), se deduce que la penetración de la interfaz es proporcional al cuadrado del espesor. En estos acuíferos, la penetración de la interfaz varía lateralmente, dando lugar a una distribución de salinidad no uniforme (Figura 3c).

En el caso de acuíferos confinados de gran extensión lateral comparada con su espesor las variaciones en la topografía del fondo pueden convertirse en el factor crítico. En estos acuíferos, el flujo se ve confinado entre el techo y la base del acuífero y, por tanto, el efecto de la gravedad se ve también limitado. La gravedad efectiva viene dada por la proyección de la gravedad sobre el fondo del acuífero, y por tanto, está controlada por la pendiente y forma de dicho fondo.

Para analizar el posible efecto de la morfología del

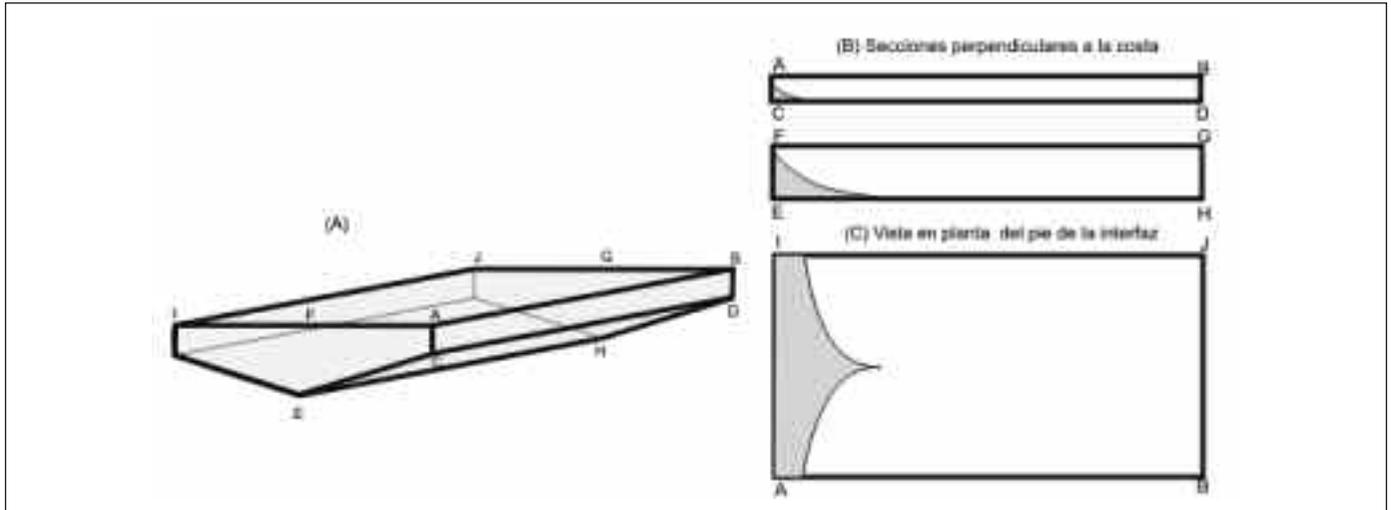


Fig. 3. (a) Acuífero de espesor variable, (b) dos cortes perpendiculares a la costa que muestran la diferente penetración de la intrusión dependiendo del espesor y (c) penetración no uniforme de la interfaz  
 Fig. 3. (a) Variable thickness coastal aquifer, (b) two different cross sections showing the different penetration of the saltwater wedge depending on the section thickness and (c) non-uniform seawater intrusion pattern

acuífero en la posición estacionaria de la interfaz, se han estudiado distintas geometrías de un acuífero confinado de gran extensión horizontal y espesor constante de 50m, (Figura 4). Los casos corresponden a un acuífero (1) horizontal, (2) inclinado hacia el mar y (3) en forma de V (con una sección central más profunda). Todas estas geometrías son simétricas por lo que sólo se modela la mitad del dominio.

Las simulaciones fueron llevadas a cabo mediante el código SUTRA. El método numérico que utiliza es el método de elementos finitos con elementos hexaédricos. La discretización temporal está basada en

diferencias finitas sistema implícito. Los resultados fueron evaluados en estado estacionario.

Los resultados muestran un comportamiento diferente entre los acuíferos con pendiente hacia el mar (caso 2) o pendientes paralelas a la costa (caso 3). Los acuíferos inclinados hacia el mar presentan un comportamiento muy similar al del acuífero horizontal tanto en términos de penetración de la cuña de intrusión como de patrón de flujo observado. Los vectores muestran la típica celda de convección vertical ilustrada en la Figura 5. El agua dulce descarga hacia el mar y se forma una celda de convección de agua sala-

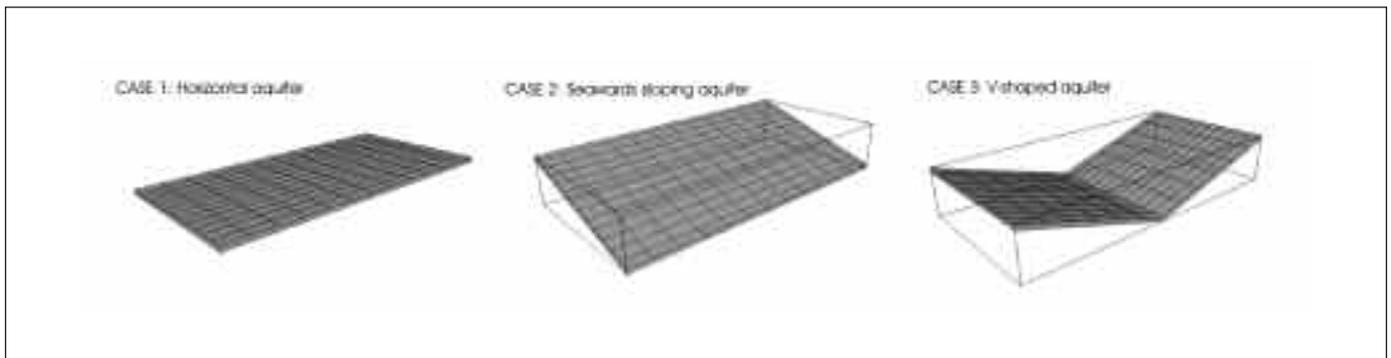


Fig. 4. Esquema de las geometrías consideradas. El agua dulce fluye desde el fondo hacia el frente. Caso 1 (acuífero horizontal), Caso 2 (pendiente hacia el mar) y Caso 3 (acuífero en forma de V).  
 Fig. 4. Schematic description of the test cases geometries. Freshwater flows from the background (inland) towards the foreground (sea-side). Case 1 (horizontal aquifer), Case 2 (seawards sloping aquifer) and Case 3 (V shaped aquifer).

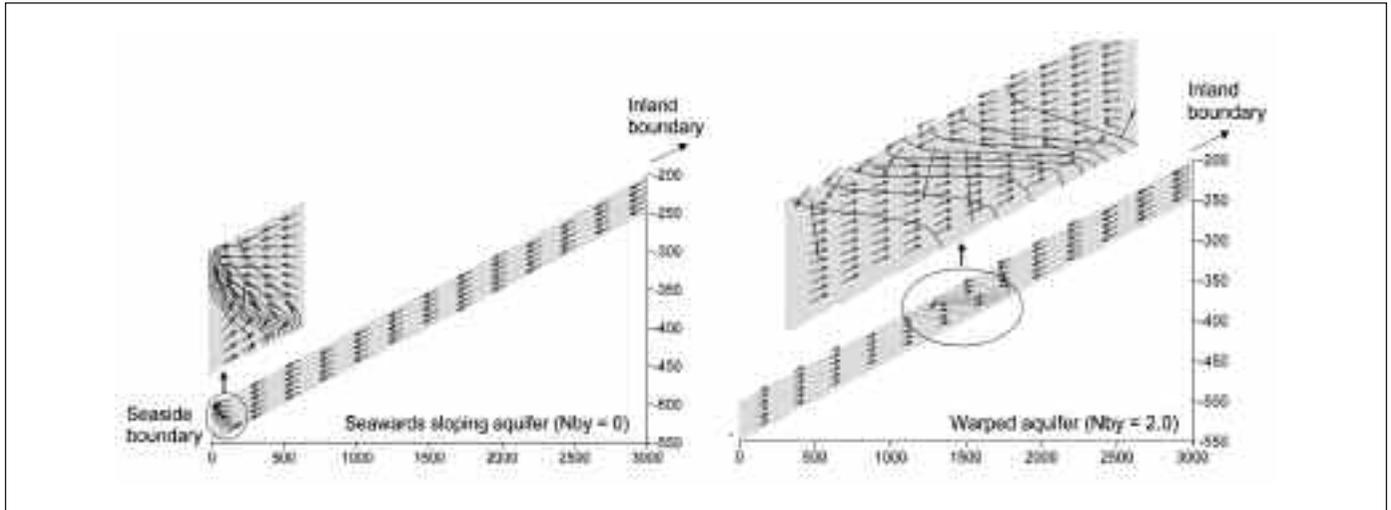


Fig. 5. Zona de mezcla y proyección de los vectores velocidad en la sección central en un acuífero sin pendiente lateral (izquierda) y para acuíferos con pendiente lateral (derecha)  
 Fig. 5. *Mixing zone and velocity vectors on the central cross section in an aquifer without lateral slope (left) and with lateral slope (right)*

da que entra en profundidad, se mezcla con el agua dulce y es arrastrada hacia el mar por esta. En otras palabras, ni la pendiente hacia el mar ni el hecho de que la descarga sea submarina afectan a la geometría de la interfaz.

Sin embargo, en el caso de acuíferos con pendiente lateral importante, las pautas de la intrusión marina son completamente diferentes a la representada por el paradigma en sección vertical. En el acuífero con pendiente lateral la interfaz se encuentra tierra adentro, lejos del contacto con el mar en la sección central, más profunda, del acuífero (Figura 5 derecha). Al aumentar la pendiente lateral, aumenta la penetración de la interfaz en esta sección. Esta mayor penetración central responde a las variaciones producidas en el flujo. El agua dulce que fluye en esta sección no puede descargar en el mar. Sin embargo, si existe entrada constante tanto de agua dulce como de agua salada, tiene que existir una zona de salida. El movimiento de agua en estos acuíferos sólo puede entenderse mirando el flujo de agua en planta (Figura 6).

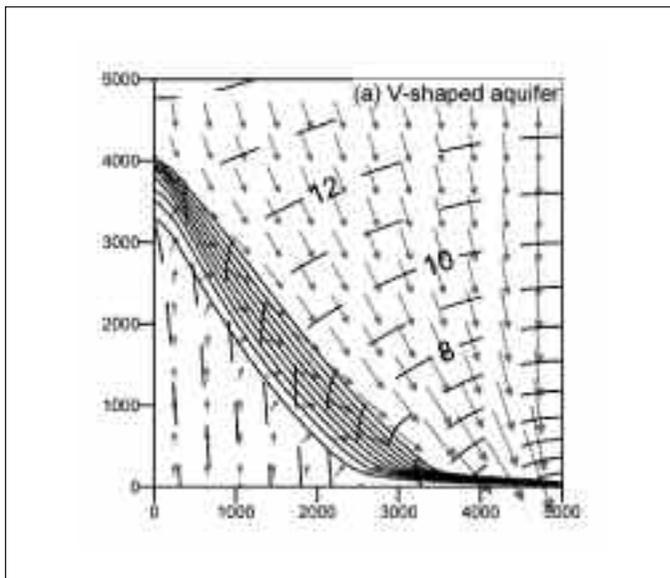


Fig. 6. Vista en planta de los vectores velocidad en el fondo del acuífero, líneas de isoconcentración e isolíneas de nivel equivalente (líneas discontinuas) para el acuífero con pendiente lateral del 10%  
 Fig. 6. *Plan view of the velocity vectors, isoconcentration lines and equivalent freshwater head isolines (dashed lines) for the aquifer with a 10% lateral slope*

El agua salada entra por la sección central, más profunda, y una vez alcanza la zona de mezcla, es desviada lateralmente y pendiente arriba. Lo mismo le ocurre al agua dulce, que es empujada por el agua de mar y solamente puede descargar en las partes más someras de la costa. La pendiente lateral provoca, por lo tanto, que la celda de convección de agua salada se desarrolle principalmente de forma lateral. Esto explica por qué el agua de mar penetra tan lejos tierra adentro en la parte más profunda del acuífero. Tanto la penetración del agua de mar como la forma de la interfaz están condicionadas por el patrón tridimensional del flujo. Por tanto, se observa diferente penetración en las secciones central y lateral en todos los casos estudiados con pendientes laterales. Como

consecuencia de esta tridimensionalidad del flujo, la cantidad de agua salada que entra en el acuífero no está uniformemente distribuida, distinguiéndose dos zonas a lo largo de la costa, una dominada por el flujo entrante y otra por el saliente. El valor máximo de descarga de sal depende de la extensión de la celda horizontal de convección que se forma.

Este efecto está caracterizado por el número de flotación lateral (Abarca *et al.*, en prensa). Este número adimensional se define comparando los dos términos de la ley de Darcy escrita en términos de nivel de agua dulce equivalente

$$q = K \nabla h K \frac{\rho - \rho_d}{\rho_d} \nabla z$$

El primer término se puede aproximar a un flujo característico del sistema, por ejemplo el flujo de agua dulce que fluye desde el continente,  $q_b$ . El segundo, término de flotación, en acuíferos de gran extensión lateral y espesor reducido  $\nabla z$  se puede aproximar a la pendiente del fondo del acuífero y

$$\frac{\rho - \rho_d}{\rho_d} \text{ a } \alpha_s$$

Para caracterizar la flotación lateral, definimos  $N_{by}$  en función de la pendiente lateral del acuífero,  $m_y$ . El número  $N_{by}$  puede expresarse también en forma de gradiente de agua dulce característico ( $\nabla h_{fc}$ ). En este caso queda de manifiesto que  $N_{by}$  compara la pendiente lateral del acuífero ( $m_y$ ) con este gradiente.

$$N_{by} = \frac{\alpha_s K m_y}{q_b} = \frac{\alpha_s m_y}{\nabla h_{fc}} \quad (1)$$

Es decir, este número compara la fuerza de arrastre hacia el mar (flujo de agua dulce) con la componente lateral de la flotación. Los gradientes habituales son del 1‰, por lo que pendientes del 4% pueden dar lugar a una fuerza de flotación lateral comparable a la del gradiente de agua dulce.  $N_{by}$  es un indicador de la magnitud de la celda de convección horizontal. Cuando el número de flotación lateral es mayor que 0.5 el flujo horizontal es dominante. En estos casos, la simplificación que mejor reproduce la esencia del problema es la modelación bidimensional en planta, en la cual se desprecian las componentes verticales del flujo.

La aplicación de la aproximación de Ghyben-Herzberg a estos acuíferos no es posible ya que la hipótesis de flujo horizontal perpendicular a la costa no se cumple. Sin embargo, se puede derivar una

aproximación equivalente para acuíferos con pendiente lateral (Abarca *et al.*, en imprenta) basada en las hipótesis de Ghyben-Herzberg (interfaz abrupta y agua salada inmóvil). La figura 7 muestra la comparación de los resultados numéricos obtenidos (línea de 50% de mezcla) y la posición del pie calculada con dicha aproximación. Se han calculado dos posiciones teóricas, una en la que se supone que la interfaz interseca la costa en el punto más somero (puntos) y una segunda en la que se supone que la intersección se produce allí donde acaba la celda horizontal ( $x = 3000$  m).

Esta segunda aproximación representa adecuadamente los resultados numéricos, aunque supone conocer *a priori* la magnitud de la celda lateral. Lo importante, sin embargo, es que la calidad de esta aproximación sugiere que una modelación bidimensional en planta puede ofrecer una buena representación de la intrusión marina en estos acuíferos y que la pérdida de la componente vertical del flujo no es crítica en estos casos.

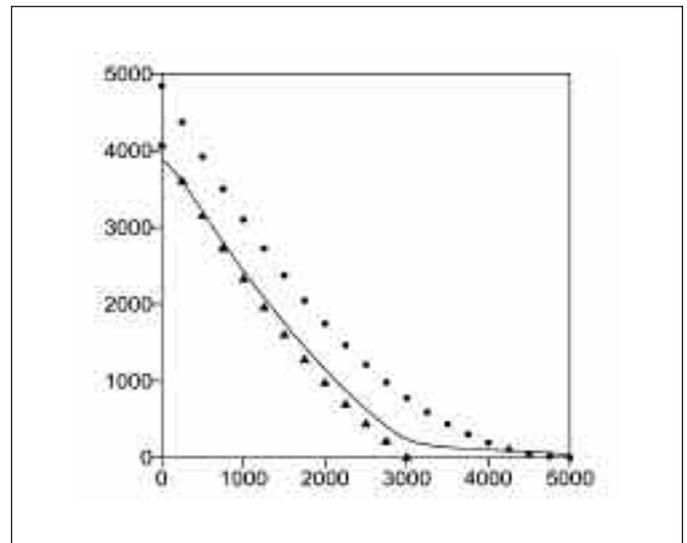


Fig. 7. Pie de la interfaz (línea continua) en un acuífero con pendiente lateral del 10% comparada con dos posiciones de la interfaz obtenidas de la aproximación de Ghyben-Herzberg equivalente para acuíferos con pendiente lateral (Abarca *et al.*, en prensa). La solución representada por círculos supone que la interfaz interseca la costa en el punto más somero, mientras que la solución representada en triángulos supone que interseca donde acaba la celda lateral (3000 m)

Fig. 7. Toe location (line) in an aquifer with 10% lateral slope compared to the two interface positions calculated by the tilted Ghyben-Herzberg approximation (Abarca *et al.*, in press). The solution depicted by circles assumes that the interface intersects the coast line at the shallowest point whereas the solution shown by triangles assumes that the coast is intersected where the lateral cell disappears (3000 m)

**Modelación bidimensional en planta: integración vertical**

El apartado anterior sugiere que en los casos en los que la celda convectiva tiene una componente horizontal importante es factible eliminar la dimensión vertical y trabajar en planta. De este modo pueden minimizar las dificultades inherentes en la modelación tridimensional, como son la diferencia en la escala horizontal y vertical (mayor extensión horizontal en acuíferos costeros comparado con su espesor); la falta de datos geológicos e hidrogeológicos en tres dimensiones; problemas de dispersión numérica y elevado tiempo computacional.

La modelación bidimensional en planta requiere la integración en vertical de las ecuaciones que gobiernan el problema. Dicha integración no es trivial ya que supone la pérdida de la componente vertical del flujo, que forma parte de la esencia del fenómeno de intrusión marina. Otro factor a tener en cuenta es que en acuíferos costeros en el entorno cercano al mar confluyen dos flujos de sentido contrario y características diferentes: por un lado flujos pequeños con concentración elevada en la base del acuífero, y por otro flujos elevados con pequeña concentración en el techo del acuífero (Figura 8). Para poder representar este efecto en modelos bidimensionales en planta es necesario tener en cuenta las perturbaciones del flujo y de la concentración con respecto a la media a la hora de integrar verticalmente las ecuaciones. Por

tanto, en lo que sigue proponemos representar el fenómeno de intrusión marina mediante una formulación 2D en planta incluyendo las perturbaciones con respecto a la media del flujo y concentración.

Para ello, suponemos que el flujo, la fracción másica y la densidad son iguales a un valor promedio más una perturbación con respecto a la media ( $q=\bar{q}+q'$ ,  $\rho=\bar{\rho}+\rho'$  y  $\omega=\bar{\omega}+\omega'$ ). Integrando en vertical las ecuaciones que gobiernan el flujo y transporte en estado estacionario se obtienen nuevos términos adicionales que permiten representar de forma óptima el fenómeno de intrusión marina en dos dimensiones.

**Ecuaciones**

El movimiento de un fluido a través de un medio poroso está regido por el Principio de Conservación del momento y masa.

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \nabla \rho q + \rho^* Q_h \tag{2}$$

Donde  $\phi$  es la porosidad,  $\rho$  es la densidad del fluido ( $kg/m^3$ ),  $q$  es el flujo de fluido ( $m^3/s/m^2$ ),  $Q_h$  es el término de fuente-sumidero y  $\rho^*$  es la densidad del fluido de la fuente. Definiendo como valor promedio de una magnitud arbitraria,  $a$ , como

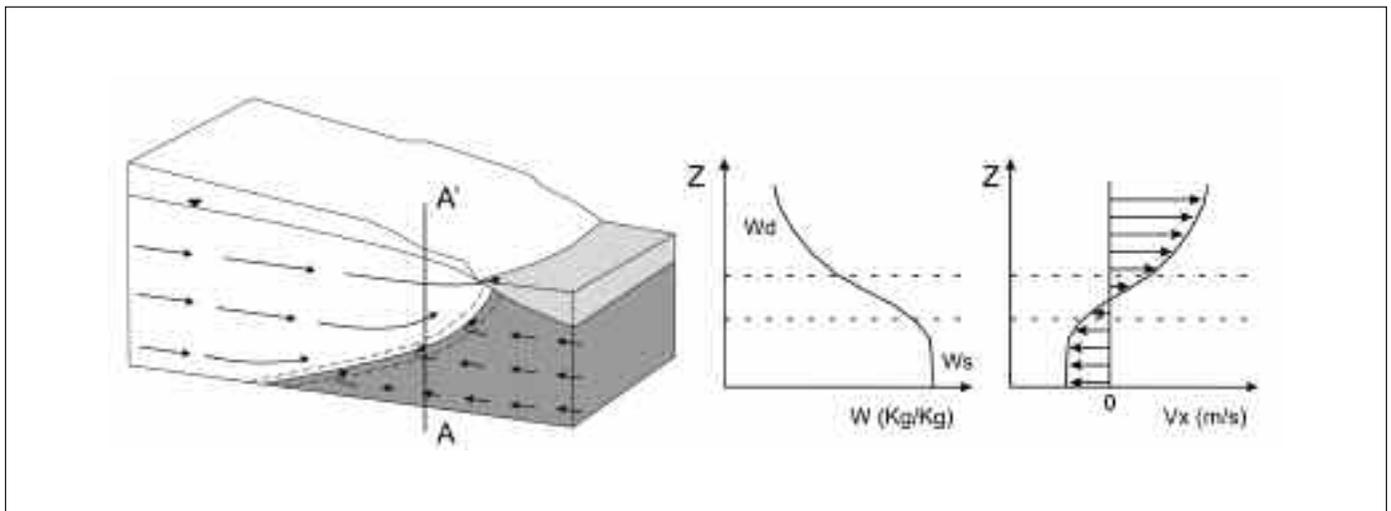


Fig. 8. Esquema tridimensional de la cuña de intrusión marina. El flujo de entrada en la base del acuífero es de pequeña magnitud y con una concentración elevada, mientras que el flujo de salida en el techo del acuífero es elevado y con pequeña concentración. Se muestra gráficamente la variación en la vertical de la fracción másica (W) y del flujo horizontal (Vx) en una cierta sección (A-A')

Fig. 8. Three-dimensional scheme of the seawater wedge. Inflow on the bottom of the aquifer is small and with high concentration, while outflow on the top of the aquifer is large and with low concentration. It shows graphically the vertical variation of the mass fraction (W) and the horizontal flow (Vx) in a cross section (A-A')

$$\bar{a} = \frac{1}{b} \int_{z_m}^{z_t} a(x, z) dz$$

y aplicando la regla de Leibnitz

$$\nabla_2 \int_{z_m}^{z_t} a(x, z) dz = \int_{z_m}^{z_t} \nabla_2 a dz + a_{(z_t)} \nabla_2 z_t - a_{(z_m)} \nabla_2 z_m \quad (3)$$

En estado estacionario y ausencia de fuentes/sumideros, la integración vertical desde la base ( $z_m$ ) al techo del acuífero ( $z_t$ ) de la ecuación se escribe como:

$$\int_{z_m}^{z_t} \nabla_2 \rho q = \int_{z_m}^{z_t} \left( \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} + \nabla_2 \rho q_{(x,y)} \right) dz = \nabla_2 \overline{\rho q_{b(x,y)}} - ((\rho q_{b(x,y)})_{z_t} \nabla_2 z_t) + ((\rho q_{b(x,y)})_{z_m} \nabla_2 z_m) + ((\rho q_z)_{(z_t)} - (\rho q_z)_{(z_m)}) \quad (4)$$

donde  $\nabla_2$  es la divergencia en dos dimensiones y  $q_{b(x,y)}$  es el caudal por unidad de ancho de acuífero en las direcciones  $x$  e  $y$ . Como resultado de la integración obtenemos una serie de términos adicionales de recarga. El segundo y tercer término se aplica en acuíferos con morfología variable y el último término representa los flujos verticales en el contorno de la base y del techo del acuífero. Si agrupamos los términos de recarga, la expresión anterior resulta:

$$\int_{z_m}^{z_t} \nabla_2 \rho q dz = \nabla_2 \overline{\rho q_{b(x,y)}} + r = 0 \quad (5)$$

El balance de masa de solutos se expresa mediante los términos de advección, dispersión y fuente-sumidero de masa de sal.

$$\frac{\partial(\rho\phi\omega)}{\partial t} = -\nabla(\rho\omega q) + \nabla(\rho D \nabla \omega) + \rho^* Q_s \quad (6)$$

donde  $D$  es el tensor de dispersión hidrodinámica. En estado estacionario y ausencia de fuentes- sumideros de masa de sal, la integración vertical de la expresión anterior se escribe como:

$$\int_{z_m}^{z_t} -\nabla(\rho\omega q) + \nabla(\rho D \nabla \omega) = -\nabla_2 \overline{(\rho q_{b(x,y)}) \omega} + \nabla_2 \overline{(b\rho D \nabla \omega)} + r \quad (7)$$

Donde  $r$  representa la recarga de flujos máscicos verticales advectivos y dispersivos en los contornos del acuífero más los flujos máscicos horizontales derivados de la morfología variable de la base y techo del acuífero. Si tomamos el flujo, la densidad y la fracción máscica igual al valor promedio más la perturbación con respecto a la media ( $q = \bar{q} + q'$ ,  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$  y  $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ ), y teniendo en cuenta que el promedio de un producto es igual al producto de los promedios más el promedio del producto de las perturbaciones  $\nabla_2 \overline{xy} = \nabla_2 \bar{x} \bar{y} + \nabla_2 (\bar{x}' \bar{y}')$ , obtenemos un término adicional que representa la desviación del flujo máscico horizontal advectivo respecto al valor promedio:

$$\int_{z_m}^{z_t} (-\nabla(\rho\omega q) + \nabla(\rho D \nabla \omega)) dz = -\nabla_2 \overline{(\rho q_{b(x,y)}) \omega} + \nabla_2 \overline{((\rho q_{b(x,y)})' \omega')} + \nabla_2 \overline{(b\rho D \nabla \omega)} + r = 0 \quad (8)$$

Para incluir el efecto de los flujos máscicos horizontales advectivos en el entorno cercano al mar, figura 8, aproximamos el término adicional a un término de tipo dispersivo-advectivo. Por tanto, la ecuación de balance de solutos integrada en la vertical resulta:

$$\nabla_2 \overline{(-\rho q_{b(x,y)}) \omega} + b \bar{\rho} D' \nabla \omega + \nabla_2 \overline{(b\rho D \nabla \omega)} + r = 0 \quad (9)$$

Siendo  $D'$  un coeficiente advectivo-dispersivo. Por tanto, conocidas las perturbaciones y el gradiente de la fracción máscica se puede calcular el valor de la dispersividad advectiva longitudinal y transversal. Las expresiones para las dispersividades advectivas resultan:

$$\alpha_L = \frac{F_{D_x} q_{bx} + F_{D_y} q_{by}}{\bar{\rho} |q| \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} q_{bx} + \frac{\partial \omega}{\partial y} q_{by} \right)} \quad (10)$$

$$\alpha_T = \frac{F_{D_x} q_{by} + F_{D_y} q_{bx}}{\bar{\rho} |q| \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} q_{by} - \frac{\partial \omega}{\partial y} q_{bx} \right)} \quad (11)$$

Donde  $F_{Dx}$  y  $F_{Dy}$  representan el promedio del producto de las perturbaciones del flujo, densidad y fracción másica en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Por tanto, si simulamos un modelo tridimensional y calculamos a partir de él las perturbaciones y los gradientes de la fracción másica, podemos calcular las dispersividades advectivas necesarias para la modelación bidimensional en planta.

Sin embargo existen casos, por ejemplo acuíferos de espesor o morfología variable, en los que el flujo dispersivo  $\bar{q}'\bar{\omega}$  es de sentido contrario a  $-\nabla\bar{\omega}$  en ciertas zonas. Al modelar estos casos las dispersividades advectivas calculadas mediante las ecuaciones (10) y (11) a partir del término dispersivo de las perturbaciones serán también negativas. Modelar con dispersividades negativas puede provocar problemas de convergencia, por lo que en estos casos se aproxima el término de las perturbaciones a la suma de un término advectivo-dispersivo más un término de fuente/sumidero de masa de sal para reproducir este efecto. De tal manera que el sumatorio de masa de sal dentro de la zona en la cual el gradiente es negativo sea igual a cero. Por tanto en la ecuación de transporte de solutos integrada en vertical aparecen dos términos adicionales además de los términos de recarga, uno advectivo-dispersivo y otro de fuente-sumidero de masa de sal, resultando:

$$\begin{aligned} \nabla_2(-(\rho q_{b(x,y)}\bar{\omega}) + b\rho D'\nabla\bar{\omega} + f_s) + \\ \nabla_2(b\rho D\nabla\bar{\omega}) + r = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Donde  $f_s$  representa la masa inyectada o extraída de sal necesaria para reproducir en ciertas zonas el gradiente negativo de concentración.

$$-\nabla_2 b(\rho q\bar{\omega}) + \nabla_2 b(\rho D'\nabla\bar{\omega}) = f_s \quad (13)$$

## Aplicaciones

Para validar la formulación anteriormente descrita se han utilizado varios modelos sintéticos. En primer lugar, se ha evaluado la validez de la integración vertical mediante el ajuste de un modelo bidimensional en sección a un modelo unidimensional equivalente teniendo en cuenta los términos de las perturbaciones. En segundo lugar, se ha modelado en tres dimensiones el acuífero confinado en forma de V

anteriormente descrito (Figura 4, caso 3), tomando una pendiente lateral del 1%. Este mismo problema se ha simulado mediante un modelo bidimensional en planta, utilizando los mismos parámetros y condiciones de contorno que en el modelo tridimensional e incluyendo los términos adicionales calculados a partir de las perturbaciones. Finalmente se ha realizado una comparativa de resultados. Todos los resultados se han analizado en estado estacionario.

## Paso de modelos 2D en sección a modelos 1D equivalentes.

Como primer problema de verificación se ha elegido el caso más sencillo, un modelo 2D en sección de espesor constante tipo Henry dispersivo de dimensiones  $500 \times 100 \text{ m}^2$  (Figura 9, (1)). Las condiciones de contorno han sido: flujo nulo en la base y techo del acuífero; caudal de agua dulce prescrito en el contorno del continente; nivel equivalente de agua dulce y flujo másico en el contorno del mar, de modo que si existe entrada de fluido al sistema toma la concentración de agua de mar, y si el flujo es de salida toma la concentración residente.

También se han modelado dos casos más complejos. En primer lugar se ha tomado un modelo sintético de un acuífero con espesor variable (Figura 9, (2)), y en segundo lugar un modelo sintético de un acuífero cuya morfología del techo y de la base varían con cierta pendiente en forma de V (Figura 9, (3)). Las condiciones de contorno y los parámetros son los mismos que en el caso anterior.

Los modelos se han simulado con el código de elementos finitos Transdens (Hidalgo, 2005), que considera las variaciones de densidad en el fluido. El flujo se resuelve en términos de nivel de agua dulce equivalente y el transporte en fracción másica de solutos.

A partir del promedio de las simulaciones 2D en sección, se calcularon las perturbaciones del flujo, densidad y fracción másica así como el gradiente de fracción másica. Con estos valores se obtuvieron los términos adicionales de recarga y los valores de dispersividad advectiva para cada elemento. Una vez calculados estos términos se han incluido en un modelo 1D equivalente, con dispersividad para cada elemento igual a la suma del valor de dispersividad advectiva y la dispersividad longitudinal utilizada en el modelo 2D en sección. En los modelos 1D equivalentes se han mantenido las condiciones de contorno, excepto en el contorno del mar donde es necesario prescribir la fracción másica para que exista entrada de masa de sal al sistema, tomando el valor obtenido al promediar el modelo 2D en el contorno.

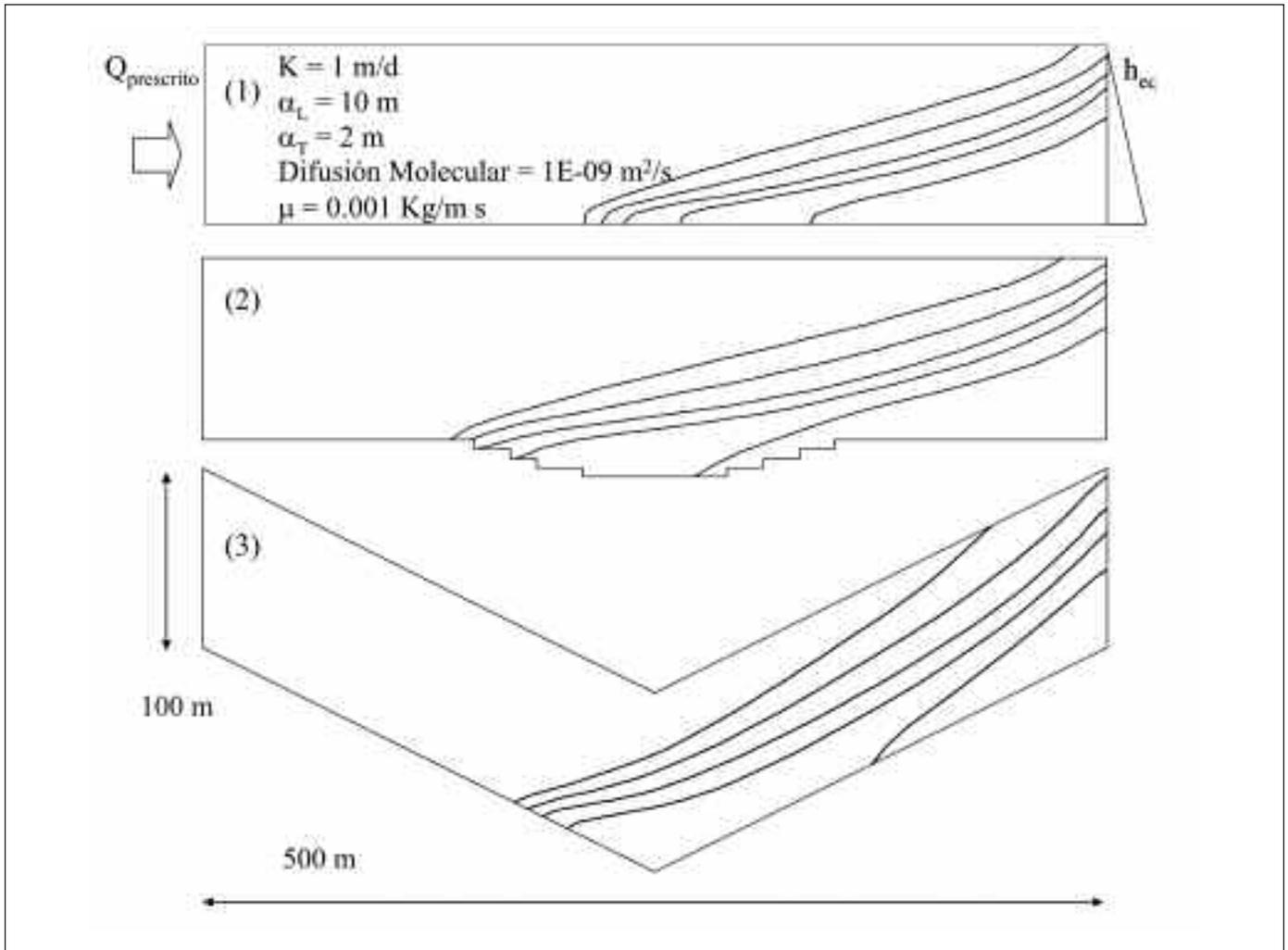


Fig. 9. Esquema de los modelos numéricos 2D en sección. Parámetros utilizados e isolíneas del 95, 75, 50, 25 y 10% de concentración para un caudal de 25 m<sup>3</sup>/d

Fig. 9. Schematic description of the numerical 2D cross section models. Parameters used in the simulations and isoconcentration lines of 95, 75, 50, 25 and 10% for a constant freshwater inflow (25 m<sup>3</sup>/d)

Al promediar los resultados de los casos (2) y (3) existen elementos cuyo gradiente de concentración es negativo, por lo que la dispersividad advectiva calculada es también negativa. Para evitar problemas de convergencia, en los modelos 1D se ha tomado como valor de dispersividad advectiva para estos elementos la media de los valores en los elementos adyacentes. La diferencia entre el término de las perturbaciones y el término advectivo dispersivo tomando las dispersividades advectivas medias de los elementos adyacentes representa la masa de sal que es necesario extraer o inyectar para reproducir este efecto. El balance de masa de sal dentro, zona en la cual el gradiente es negativo es igual a cero.

Finalmente se han comparado los ajustes entre los modelos 2D en sección y los modelos 1D equivalentes tomando distintos valores de caudal de agua dulce prescrito, caudales de 100, 50, y 25 m<sup>3</sup>/d en el primer problema de verificación (Figura 9, (1)) y caudales de 35, 25 y 15 m<sup>3</sup>/d para los casos (2) y (3).

Las dispersividades calculadas para cada elemento incluidas en el modelo 1D equivalente para el primer problema de verificación se muestran en la figura 10. Cerca del contorno del continente los valores son los mismos que para el modelo 2D y aumentan progresivamente hacia el contorno del mar. Al disminuir el caudal de agua dulce prescrito las dispersividades advectivas calculadas aumentan.

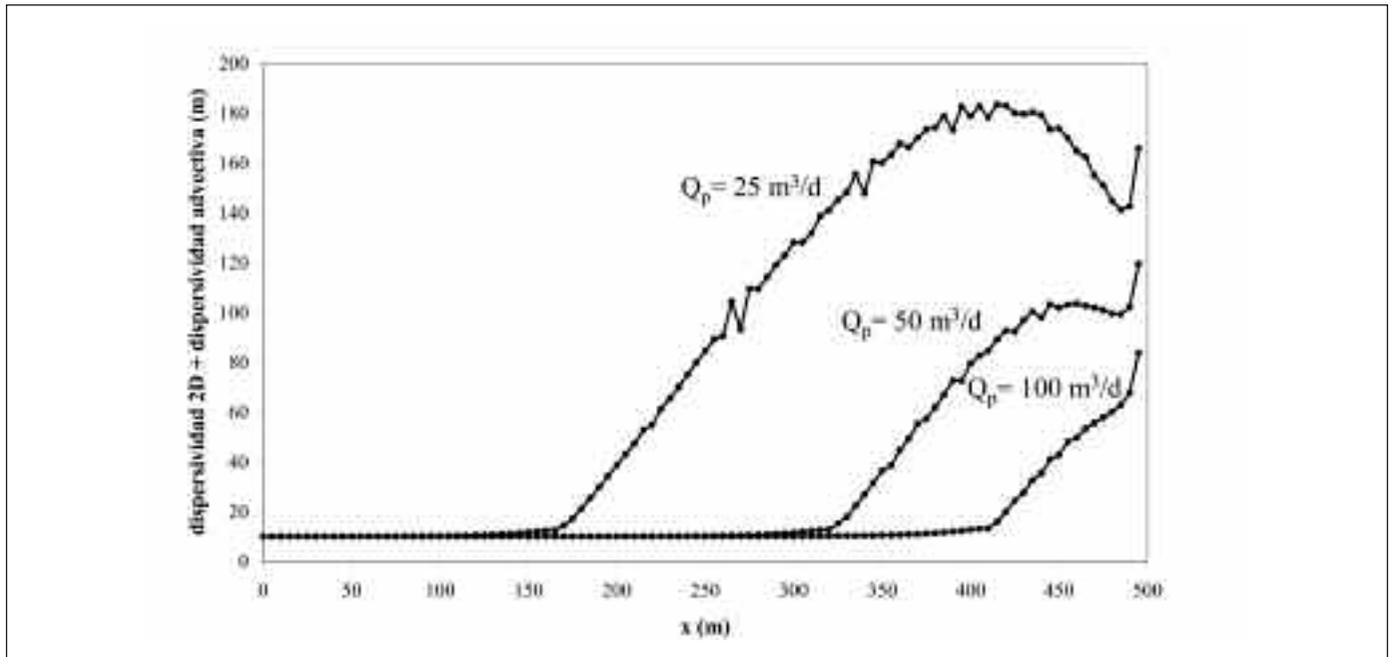


Fig. 10. Dispersividades para cada elemento incluidas en el modelo 1D equivalente para el primer problema de verificación (Fig. 9 (1)) para los distintos valores de caudal de agua dulce prescrito. En el entorno cercano al contorno del continente el valor de dispersividad es igual al valor utilizado en el modelo 2D y aumentan hacia el contorno de mar. A menor caudal de agua dulce prescrito los valores de dispersividad obtenidos aumentan

*Fig. 10. Dispersivities for each element included in the 1D equivalent model in the first verification problem (fig 9 (1)) for the different values of prescribed freshwater inflow. The value of dispersivity is the same as the value used in the 2D model near the inland boundary and it increases towards the seaside. The value of dispersivity increases when the prescribed freshwater inflow decreases*

La Figura 11 muestra los resultados para el primer problema de verificación. Las líneas gruesas representan el promedio de los modelos 2D en sección, las líneas finas los modelos 1D sin tener en cuenta las perturbaciones y los puntos los modelos 1D incluyendo las perturbaciones. Los resultados muestran que si no se tienen en cuenta las perturbaciones el resultado a partir del modelo 1D difiere mucho del modelo 2D promedio. Incluso la solución para el modelo 1D no cambia para los diferentes valores de caudal de agua dulce prescrito excepto muy cerca del contorno del mar ya que el valor de concentración prescrita es diferente. Una vez se implementan los términos a partir de las perturbaciones los ajustes son muy satisfactorios.

En el modelo promediado 2D en sección de espesor variable (2), para cada caudal de agua dulce prescrito, existen cuatro elementos en los cuales el gradiente de concentración es negativo (elementos en los cuales el espesor de acuífero disminuye) y otros cuatro en los cuales el gradiente de concentración sufre un fuerte aumento de pendiente (elementos en los cuales aumenta el espesor de acuífero), Figura 12

(a). En estos elementos se ha incluido el término de fuente sumidero de masa de sal, funcionando como dipolos, de tal manera que la masa inyectada en uno de los dos nodos que componen el elemento es igual a la masa extraída por el otro nodo. En el modelo 2D en sección promediado de morfología variable (3) existe una zona a partir del máximo de concentración hacia el contorno del mar (zona de mayor profundidad), en la cual el gradiente de concentración es muy pequeño e incluso negativo, Figura 12 (b). En los modelos unidimensionales se ha incluido en estas zonas el término de fuente-sumidero de masa de sal, cuyo balance total en la zona es cero, para reproducir estos efectos. Una vez se implementan los términos adicionales a partir de las perturbaciones, se obtienen buenos ajustes entre los modelos promediados 2D en sección y los modelos 1D equivalentes (Figura 12).

### **Paso del modelo 3D al modelo 2D en planta equivalente.**

Finalmente, como tercer problema de verificación, se

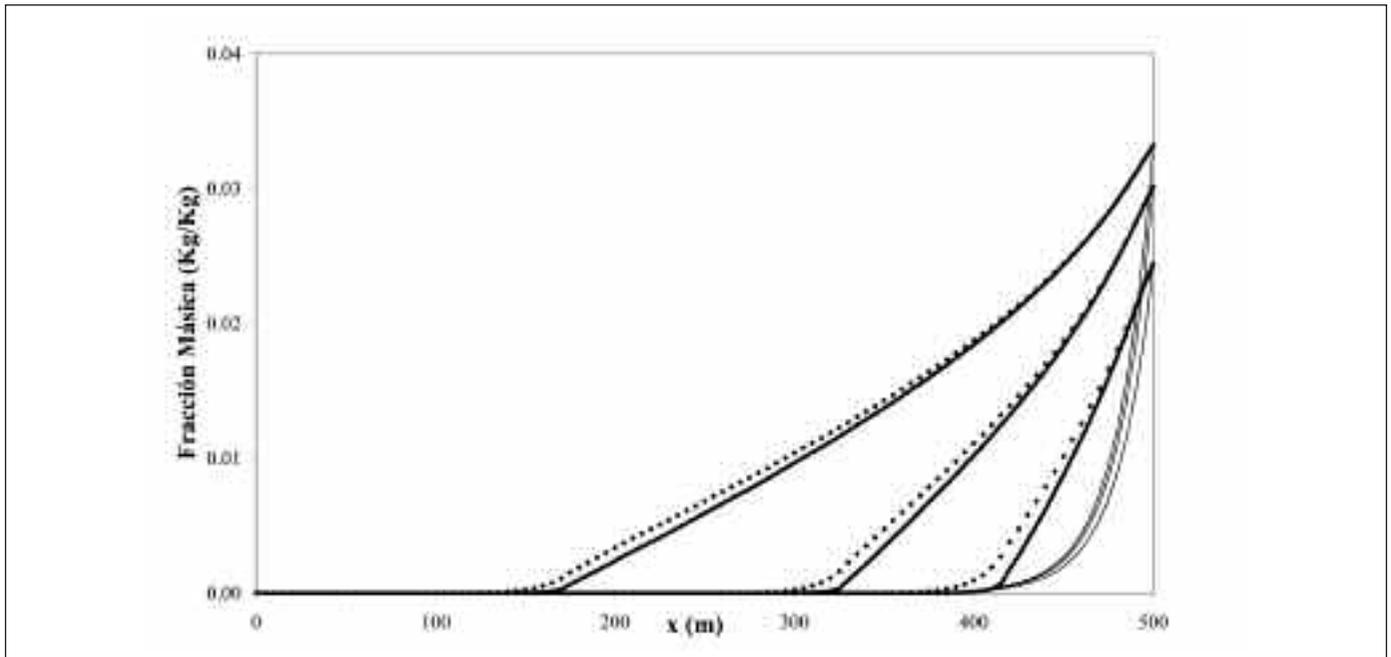


Fig. 11. Resultados de la fracción másica en el caso (1) para distintos caudales de agua dulce prescrito (100, 50, y 25m<sup>3</sup>/d). Se representan los modelos 2D promedio (línea gruesa), los modelos 1D incluyendo las perturbaciones (línea discontinua) y los modelos 1D sin tener en cuenta las perturbaciones (línea fina continua). El ajuste entre los modelos 2D promedio y los modelos 1D incluyendo las perturbaciones es muy satisfactorio

*Fig. 11. Salt mass fraction results for the different constant inflow values (100, 50, y 25m<sup>3</sup>/d). The thick solid lines are the solution to the averaged 2D model, the dots represent the 1D solution including the perturbations and the thin solid lines show the 1D model without perturbations. The comparison between average 2D and 1D model when the perturbations are included are fairly close*

ha tomado como ejemplo el acuífero confinado con una cierta pendiente lateral (1%) descrito en el apartado 2 (Figura 4 (c)).

El acuífero se ha modelado en tres dimensiones y en dos dimensiones en planta, utilizando los mismos parámetros que en el modelo tridimensional e incluyendo los términos adicionales a partir de las perturbaciones. Finalmente se ha realizado una comparativa de resultados.

En primer lugar se ha simulado el sistema en 2D en planta sin tener en cuenta las perturbaciones, es decir, utilizando los mismos valores de dispersividad que en el modelo 3D. La comparación de la distribución de velocidad y concentración para el modelo 3D promediado y 2D revela resultados interesantes (Figura 14 (a)). El ancho de la zona de mezcla es mayor para el modelo 3D. Los flujos horizontales asociados al agua salina intruyen menos y son algo mayores para el modelo 3D promediado. La longitud del pie de la interfaz, medida a partir de la isolínea del 50% de concentración, es mayor para el modelo 2D. Todos estos resultados evidencian que las dispersividades en el modelo 2D en planta tienen que ser mayores que los valores tomados para el modelo 3D,

puesto que al aumentar el valor de la dispersividad aumentan las velocidades, el ancho de la zona de mezcla y el pie de la interfaz retrocede.

Con los valores de las perturbaciones, obtenidas a partir del modelo 3D, se han calculado los términos adicionales necesarios para mejorar los ajustes en el modelo 2D en planta. Los valores de las dispersividades advectivas obtenidos son elevados cerca del contorno del mar, varios órdenes de magnitud mayor que los valores tomados para el modelo 3D. La Figura 13 muestra los valores de dispersividades advectivas tanto longitudinales como transversales para cada elemento calculadas a partir del modelo 3D.

En el modelo 3D la descarga del acuífero se produce en las capas superiores y en la zona más superficial. En el modelo 2D este efecto no se puede reproducir y la descarga se produce únicamente en la zona de menor profundidad. Por este motivo los resultados no se ajustan en esta zona del acuífero. Para resolver este problema, una vez se han implementado las perturbaciones, ha sido necesario prescribir la fracción másica en el modelo 2D, tomando el valor de referencia de la fracción másica del mar.

Una vez implementadas las perturbaciones en el

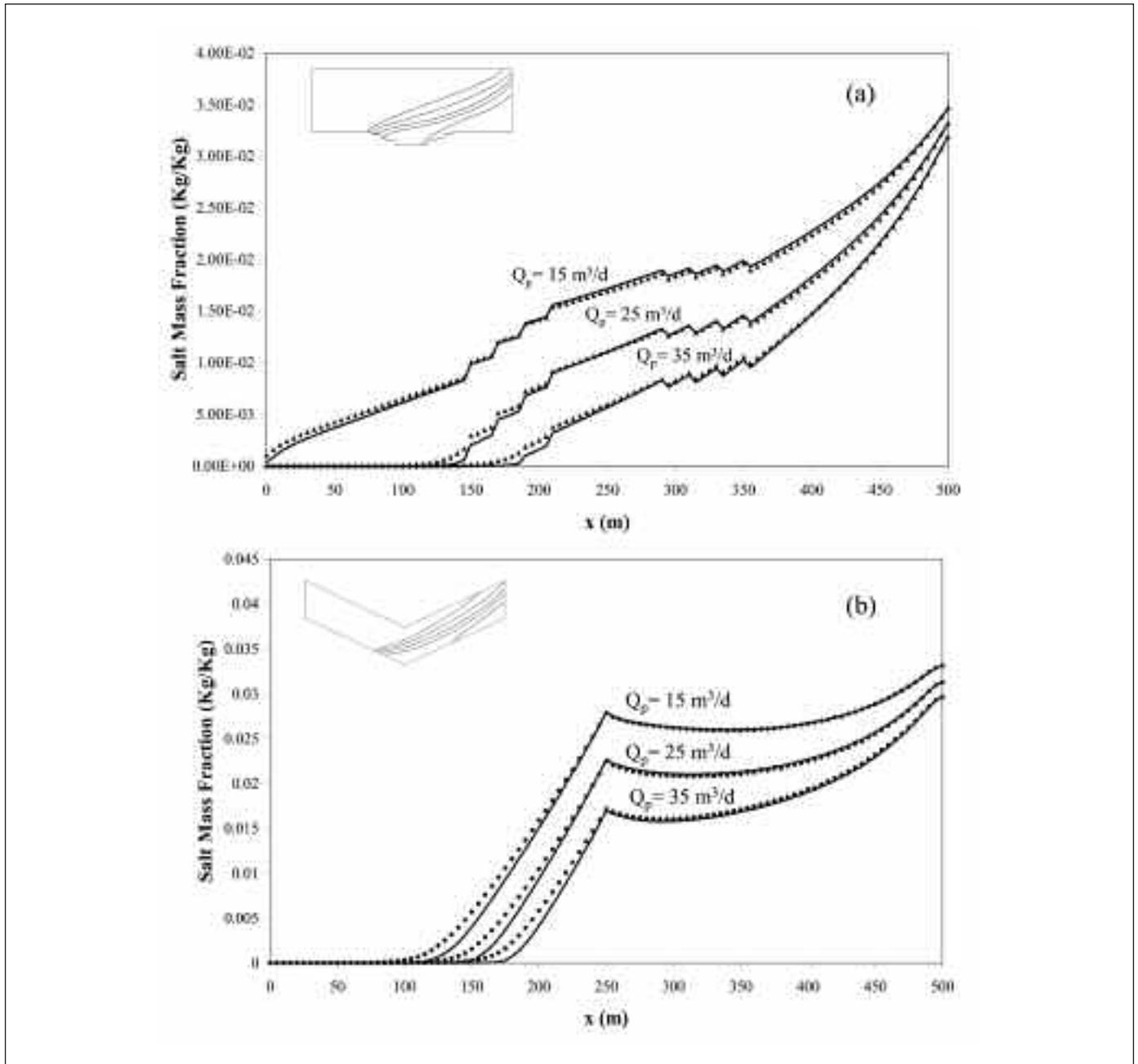


Fig. 12. Resultados de fracción málica para distintos caudales de agua dulce prescrito (35, 25 y 15m³/d) para el modelo de espesor variable y el modelo de morfología en "V" de base y techo. El ajuste entre los modelos 2D promedio (línea continua) y los modelos 1D implementando el término fuente/sumidero de masa de sal y el dispersivo a partir de las perturbaciones (puntos) es muy bueno  
 Fig. 12. Salt mass fraction results for the different constant inflow values (35, 25, y 15m³/d) in the variable thickness model and the "V" geometry model. The results of the 1D solution including the sink/source mass and dispersive term (dots) fits perfectly the averaged 2D model (solid lines)

modelo 2D en planta y prescrita la fracción málica en el contorno del mar, los ajustes con respecto al modelo 3D promedio son realmente buenos, como se observa en la figura 14 (b). Al aumentar el valor de las

dispersividades en el modelo 2D, se incrementa el ancho de la zona de mezcla, y disminuye la longitud del pie, obteniendo un buen ajuste con respecto al modelo tridimensional.

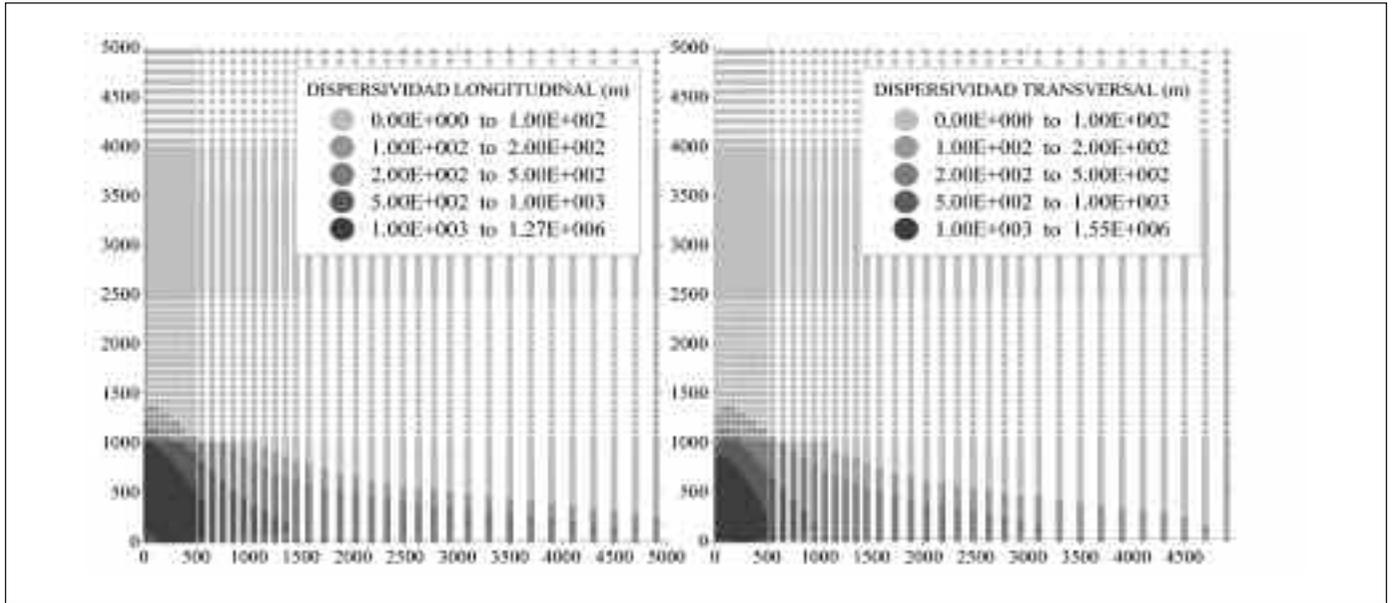


Fig. 13. Valor de las dispersividades advectivas (m) longitudinales (izquierda) y transversales (derecha) para cada elemento calculadas a partir de las perturbaciones. Los valores cerca del contorno del mar son muy elevados comparados con los valores tomados para el modelo 3D y decrecen hacia el continente

*Fig. 13. Longitudinal and transverse advective dispersivities for each element calculated from the perturbations. These values are very high near the seaside boundary compared with the value used in the 3D model and the values decrease towards the inland*

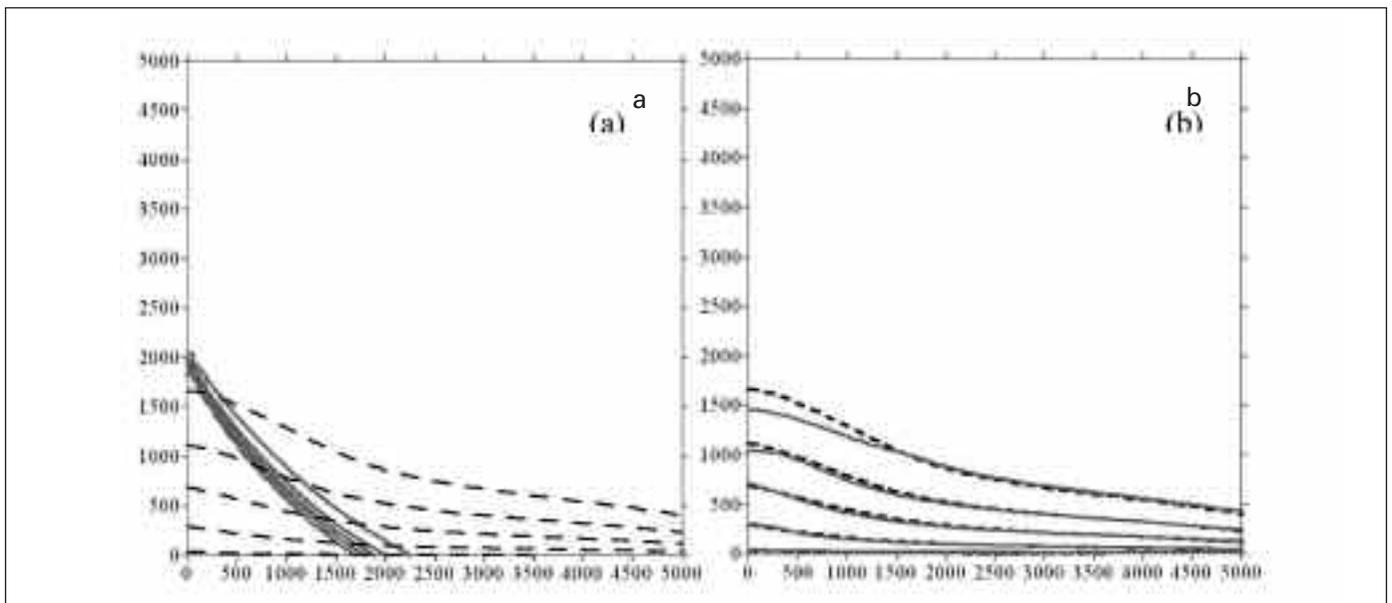


Fig. 14. Vista en planta de isoconcentración de 1, 25, 50, 75 y 95% de concentración. Comparación entre el modelo 3D promedio (línea discontinua) y el modelo 2D en planta (línea continua) sin tener en cuenta las perturbaciones (a) y teniéndolas en cuenta (b). Sin tener en cuenta las perturbaciones existen notables diferencias en el ancho de la zona de mezcla y la longitud del pie. Cuando se implementan las perturbaciones en el modelo 2D en planta los ajustes con respecto al modelo 3D promedio son muy satisfactorios

*Fig. 14. Plan view of the isoconcentration lines (1, 25, 50, 75 y 95%). Comparison between the averaged 3D model (dashed lines) and the 2D model when the perturbations are not included (a) and when the perturbations are included (b). Without perturbations there are discrepancies in the width of the mixing zone and the length of the toe . When the perturbations are included the resultin 2D model approximates the 3D dynamics with satisfactory results*

## Conclusiones

La complejidad de la intrusión marina lleva a la búsqueda de simplificaciones que a la vez que facilitan el proceso de modelación, consigan representar la esencia de problema. Un problema habitual en la modelación de acuíferos costeros es la gran extensión horizontal de estos acuíferos comparada con su espesor lo que se traduce en una gran diferencia de escalas vertical y horizontal. Esta diferencia lleva asociada problemas de discretización espacial y del tratamiento de la dispersividad.

En estos acuíferos, en los que el flujo se encuentra confinado entre la base y el techo del acuífero, el efecto de la gravedad se ve también condicionado por la forma del fondo del acuífero. El estudio de diferentes morfologías de acuífero muestra que las pendientes laterales (paralelas a la línea de costa) son críticas para el estudio de la intrusión marina en este tipo de acuíferos. Las pendientes laterales provocan que la celda de convección de agua salada se desarrolle preferentemente en horizontal, dando lugar a zonas preferentes de intrusión y zonas preferentes de descarga de agua dulce a lo largo de la costa. Este patrón de intrusión sugiere que una simulación bidimensional en planta puede ser una buena simplificación del problema, resolviendo así el problema de las diferentes escalas horizontal y vertical.

Para desarrollar una formulación óptima para la representación de la intrusión marina en modelos en planta, se ha presentado una metodología para la integración vertical de las ecuaciones de flujo y transporte con densidad variable. La integración vertical supone la pérdida de los flujos verticales, inherentes al fenómeno de intrusión. Por lo tanto, la metodología propuesta expresa las ecuaciones integradas en términos de flujos medios y añade unos términos adicionales perturbativos con respecto a estos flujos medios, que son la representación de los flujos verticales en la formulación en planta. Los resultados muestran que resultan imprescindibles para representar de forma adecuada el fenómeno de intrusión prescindiendo de la componente vertical. Estos términos se han validado a partir de simulaciones previas que incluyan la componente vertical obteniendo el valor de dispersividad para cada elemento.

Los resultados muestran que para ajustar los resultados de una simulación en planta a los resultados tridimensionales es necesario, en general, aumentar la dispersividad equivalente. Existen algunos casos, por ejemplo acuíferos de espesor o morfología variable, en los que el gradiente de concentración promedio es negativo en ciertas zonas. En

estos casos, además de los términos adicionales anteriormente citados, es necesario incluir un tercer término de fuente sumidero de masa de sal. De tal manera que el sumatorio de masa de sal dentro de la zona en la cual el gradiente es negativo sea igual a cero. Una vez se implementan estos términos en los modelos sin componente vertical los ajustes con respecto a los modelos incluyendo dicha componente vertical son realmente buenos. Estos ajustes confirman la validez de la formulación descrita, permitiendo representar de forma óptima el fenómeno de intrusión marina en dos dimensiones.

## Referencias

- Abarca, E., Carrera, J., Sánchez-Vila, X., Voss, C.I. (en prensa), Quasi-horizontal circulation cells in 3D seawater intrusion, *Journal of Hydrology* (2007).
- Bakker, M., 2003. A Dupuit formulation for modeling seawater intrusion in regional aquifer systems, *Water Resour. Res.*, 39(5), 1131.
- Benkabbour, B. and Toto, E.A. and Fakir, Y., 2004. Using DC resistivity method to characterize the geometry and the salinity of the Plioquaternary consolidated coastal aquifer of the Mamora plain, Morocco, *Environ. Geol.*, 45, 518-526, doi:10.1007/s00.254-003-0906-y.
- Cooper, J., H.H., 1964. A hypothesis concerning the dynamic balance of fresh water and salt water in a coastal aquifer, *Water-Supply Paper 1613-C*, U.S. Geological Survey.
- Flores-Márquez, E.L. and Campos-Enríquez, J.O. and Chávez-Segura, R.E. and Castro-García, J.A., 1998. Saltwater intrusion of the Costa de Hermosillo aquifer, Sonora, Mexico: A numerical simulation, *Geofísica Internacional*, 37(3), 131-151.
- Ghyben, B. W., 1889. Nota in verband met de voorgenomen put boring nabij Amsterdam, The Hague. K. Inst. Ing. Tydschrift, pp 8-22.
- Henry, H. R., 1964. Effects of dispersion on salt encroachment in coastal aquifers, *Water-Supply Paper 1613-C*, U.S. Geological Survey.
- Herzberg, A., 1901. Die wasserversorgung einiger nordseebäder, *Jour. Gasbeleuchtung und Wasserversorgung*, 44, 815-819, 842-844.
- Hidalgo, J. J. and Slooten, L. J. and Medina, A. and Carrera, J., 2004. A Newton Raphson based code for seawater intrusion modelling and parameter estimation, En *Groundwater And Saline Intrusion: Selected Papers From The 18th Salt Water Intrusion Meeting. 18th SWIM, Cartagena 2005*, 111-120 pp.
- Rangel-Medina, M. and Monreal-Saavedra, R. and Morales-Montaña, M. and Castillo-Gurrola, J., 2003. Caracterización geoquímica e isotópica del agua subterránea y determinación de la migración de la intrusión

marina en el acuífero de la Costa de Hermosillo, Sonora, México, *Tecnología de la intrusión de agua de mar en acuíferos costeros: Países mediterráneos*, IGME, Madrid.

Segol, G., 1994. *Classic groundwater simulations: proving and improving numerical models*, 513 pp., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Wilson, J. L. and A. Sa Da Costa, 1982. Finite Element Simulation of a Salwater/Freshwater Interface with indirect toe tracking, *Water Resour. Res.*, 18(4), 1069-1080.

Recibido: marzo 2007

Aceptado: julio 2007