

S.E.V y Optimización Global: una visión diferente de los modelos equivalentes en geofísica aplicada

J. Paulino Fernández Álvarez⁽¹⁾, J. Luis Fernández Martínez⁽²⁾ y C. Omar Menéndez Pérez⁽²⁾

(1) Dpto. de Explotación y Prospección de Minas, Area de Investigación y Prospección Minera
Escuela de Minas, Universidad de Oviedo, Independencia, N° 13, 33004 Oviedo.
email: pauli@uniovi.es

(2) Dpto. de Matemáticas, Area de Matemática Aplicada,
Universidad de Oviedo, Calvo Sotelo, s/n, 33007 Oviedo.
email: jlfm@uniovi.es, omar@orion.ciencias.uniovi.es

RESUMEN

El problema inverso asociado a los Sondeos Eléctricos Verticales es un problema mal planteado en el sentido de que pequeñas perturbaciones en las observaciones de campo (errores de medida) se propagan hacia la solución del problema modificándola de modo importante. La interpretación tradicional del problema inverso como problema de estimación de parámetros, pretende encontrar un único modelo. No obstante, muchos más modelos –conocidos como soluciones equivalentes– producen ajustes igualmente razonables de las medidas. Los métodos de optimización local, proporcionan estimaciones inestables que, probablemente, estén alejadas del mínimo global. Los métodos de optimización global son estrategias probabilísticas capaces de explorar completamente el espacio de modelos y de hallar, al menos de modo asintótico, el mínimo global del problema. Han sido programadas, utilizadas y presentadas dos de estas técnicas: simulated annealing (S.A) y algoritmos genéticos (A.G). Las dos son muy importantes en el denominado concepto bayesiano del problema inverso, mucho más adecuado en un marco ingenieril orientado a la toma de decisiones. En el marco bayesiano, el objetivo es determinar la distribución a posteriori de probabilidades de la solución, dadas las observaciones y la información a priori externa. Más que las capacidades de convergencia de estos algoritmos, interesa el hecho de que, bajo ciertas circunstancias, proporcionan la muestra estadística necesaria para estimar la citada función a posteriori. En este artículo se aportan justificaciones al uso de los A.G con este propósito, tanto a través de razonamientos sintéticos como utilizando un caso práctico relacionado con un problema de intrusión salina en Murcia (España).

Palabras clave: algoritmos genéticos, enfoque bayesiano, problema inverso resistivo, recocido simulado, sondeos eléctricos verticales.

VES and global optimisation methods: a different perspective to analyze equivalent models in applied geophysics

ABSTRACT

The vertical Electrical Sounding problem is ill posed. Small data disturbances propagate backwards and contaminate notably the solution. Classical interpretation of the inverse problem as a parameter estimation case searches for a unique model. Yet, many models –known as equivalent models– are able to fit data equally well. Local optimization techniques provide unstable solutions, probably very different from the global minimum. Global optimization methods, are probabilistic strategies able to explore the whole model space and to find, asymptotically at least, the global minimum of the problem. Two of these techniques have been programmed, used and are described here: simulated annealing and genetic algorithms. Both are very important in the Bayesian concept of the inverse problem, better issued for practical engineering decision purposes. In the Bayesian framework, the goal is to determine the a posteriori probability distribution of the solution, given data and external a priori information. More interesting yet than their global convergence properties is the fact that, run in a certain way, they provide the sample needed to estimate this a posteriori p.d.f. Justification is given to the use of G.A for these purposes, both through synthetic reasoning and with a practical decision case related to a groundwater coastal intrusion problem in Murcia (Spain).

Key words: bayesian approach, genetic algorithms, resistive inverse problem, simulated annealing, vertical electrical soundings.

Introducción a los sondeos eléctricos verticales

Las técnicas geofísicas son metodologías de trabajo no destructivas cuyo resultado es una imagen de la distribución de cierta propiedad física de interés en el subsuelo. Cada método geofísico explora distintas propie-

dades del terreno. Así, los métodos eléctricos permiten investigar las propiedades del subsuelo que afectan a la propagación de corrientes eléctricas y al valor de los campos eléctricos que éstas generan.

Existen numerosos métodos de este tipo con gran cantidad de aplicaciones prácticas (Orellana, 1982;

Telford, 1990; Patra y Nath, 1999). Este trabajo centra su atención en un método eléctrico resistivo de corriente continua, denominado Sondeo Eléctrico Vertical (S.E.V), dada su importancia práctica y su economía de uso. La corriente se inyecta en el terreno, desde la superficie, mediante electrodos, midiéndose la diferencia de potencial generada entre otros dos electrodos situados también superficialmente. Es posible trabajar con diferentes dispositivos, correspondiendo cada uno de ellos a diferentes posiciones relativas de los electrodos de corriente y de potencial. El dispositivo Schlumberger es uno de los más utilizados. En este dispositivo, los electrodos de corriente y de potencial se sitúan simétricamente respecto a un punto central, siendo la separación entre los últimos mucho menor que la de los primeros. Al crecer la distancia entre los puntos de inyección, aumenta también la profundidad de investigación, ya que se recaba información de zonas cada vez más profundas.

El propósito del problema inverso es determinar las resistividades y los espesores de las formaciones del subsuelo a partir de las medidas de campo. Este proceso era realizado manualmente mediante la superposición gráfica de ciertas curvas patrón con las curvas de campo (Orellana y Mooney, 1966). La irrupción de los ordenadores y los progresos en los métodos numéricos, simplificaron la solución del problema directo, es decir, el cálculo de las resistividades aparentes en un terreno multicapa (Gosh, 1971 a,b) y permitieron abordar la solución del problema inverso mediante técnicas de la teoría de optimización.

El problema directo en S.E.V

El problema directo busca obtener una predicción de las medidas que, en ausencia de errores experimentales, serían obtenidas sobre un terreno de características (espesores y resistividades) conocidas. En el caso de los S.E.V, el modelo conceptual que representa al terreno real cumple las siguientes hipótesis:

- Existe un número finito de capas horizontales de determinada resistividad y espesor. El espesor de la última se supone infinito.
- Las capas tienen extensión lateral infinita.
- Cada capa es homogénea e isótropa respecto a la resistividad. La resistividad, por tanto, sólo cambia en vertical y lo hace de manera estratificada.

El desarrollo de la teoría matemática del problema directo de S.E.V se debe, entre otros, a los trabajos de Stefanescu y Schlumberger (1930), Slichter (1933) y Pekeris (1940).

En el caso de una inyección puntual de corriente, se obtiene la expresión de los potenciales que se obser-

varían en superficie como solución de la ecuación de Laplace en cada capa, imponiendo las condiciones de transmisión y contorno pertinentes (Koefoed, 1979; Patra y Nath, 1999). El principio de superposición permite emplear dicha solución para hallar los potenciales generados en un dispositivo real y calcular la magnitud denominada resistividad aparente:

$$\rho_{ap}(s) = k_g(s) \frac{\delta V(s)}{I}$$

donde k_g es un factor geométrico que depende del tipo de dispositivo, $\delta V(s)$ es la diferencia de voltaje entre los electrodos de potencial, I es la intensidad de la corriente inyectada y s es el semiespaciado entre los electrodos de corriente. Para el dispositivo Schlumberger, la expresión de la resistividad aparente es (Koefoed, 1979):

$$\rho_{ap}(s, m) = \rho_1 + s^2 \int_0^{\infty} (T_1(\lambda, m) - \rho_1) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda, \quad [1]$$

donde m es el vector de parámetros del modelo (resistividades y espesores), de dimensión $2n - 1$, siendo n el número de capas geoelectricas; ρ_1 es la resistividad de la primera capa, $T_1(\lambda, m)$ es una función llamada transformada de resistividad de la primera capa, que depende no linealmente del modelo m (Pekeris, 1940), $J_1(\cdot)$ es la función de Bessel de orden 1, y λ puede interpretarse como una frecuencia espacial generalizada de dimensión $[m^{-1}]$.

El algoritmo que resuelve numéricamente el problema directo procede así:

- Supuesto conocido m , hallar la función $T_1(\lambda, m)$, usando las *relaciones de recurrencia* de Pekeris (Pekeris, 1940).
- Calcular la resistividad aparente mediante evaluación de la integral impropia [1]. Dicho cálculo puede hacerse a través de fórmulas de cuadratura numérica o bien expresando dicha integral como un producto de convolución y aplicando teoría de filtros (Gosh, 1971 a, b).

El Problema Inverso como problema de identificación de parámetros: dificultades y soluciones alternativas

El problema inverso en S.E.V persigue obtener, a partir de observaciones en superficie de resistividades aparentes, el vector de parámetros m que describe el modelo estratificado de terreno. En su formulación tra-

dicional es, pues, un problema de identificación de parámetros.

Sabiendo que las medidas de campo están afectadas por error experimental, el modelo buscado no podrá (ni deberá) reproducirlas exactamente, sino ajustarlas con cierta tolerancia. Se trata, así, de estimar un vector de parámetros, m_{sol} , perteneciente a un espacio de modelos M , estipulado previamente, de modo que se cumpla:

$$F(m_{sol}) \cup d \equiv \rho_{ap}$$

Aquí, F es el funcional del problema directo y contiene la física del problema junto a otras hipótesis adicionales y ρ_{ap} es el vector de resistividades aparentes medido en campo.

Más que un problema único, esta formulación representa a una familia de posibles problemas, según el significado cuantitativo que se atribuya al signo \cup . Uno de ellos identifica como solución aquella que minimiza la norma euclídea de la diferencia entre $F(m)$ y ρ_{ap} , dando paso a la formulación típica de mínimos cuadrados, es decir:

$$F(m_{sol}) \cup \rho_{ap} \Leftrightarrow \Phi(m_{sol}) = \min_{m \in M \subset \mathbb{R}^{2n-1}} \Phi(m) = \min_{m \in M \subset \mathbb{R}^{2n-1}} \|W(\rho_{ap} - F(m))\|_2^2 \quad [2]$$

donde ρ_{ap} es el vector de resistividades aparentes en los puntos de medida; $F(\cdot)$ es el funcional no lineal asociado al problema directo; W es una matriz de ponderación adecuada de datos y M simboliza el espacio de modelos de terreno admisibles.

Muchos problemas en geofísica, en particular los S.E.V, poseen la propiedad de que existen modelos equivalentes, posiblemente muy distintos entre sí, que ajustan los datos medidos con un grado aceptable de error (Hansen, 1998). Visto a la inversa, la propagación de la incertidumbre de la medida (que pueden ser pequeña en una campaña cuidada de toma de datos) desde las observaciones ρ_{ap} , hasta la solución m_{sol} , se amplifica notablemente produciendo gran inestabilidad y dispersión de las soluciones obtenidas. Cuando, como en este caso, modelos solución muy diferentes entre sí, resuelven con la misma precisión (error) el problema inverso abordado, se habla de problema mal planteado (Hadamard 1923; Hansen 1998).

En nuestro caso, el problema inverso en S.E.V poseería solución única (Orellana, 1982) si, en lugar de disponer sólo de algunos puntos de medida, como

ocurre en la realidad, separados entre sí, éstos se situasen en superficie sin solución de continuidad, proporcionando una curva continua de datos. Dado que en la práctica esto nunca es así (se posee un número finito y escaso de datos) el mal planteamiento del problema inverso en S.E.V. se manifiesta en la topografía de la función objetivo. Además, dado que el espacio de modelos tiene, normalmente, más de tres dimensiones, no es posible percibir la forma de la función objetivo mediante una sola representación visual. Aquí se caracteriza la forma de dicha *hipersuperficie* alrededor del mínimo global, mediante proyecciones bidimensionales.

Para ilustrar dicha idea se ha realizado el siguiente experimento sintético: sobre un terreno modelizado mediante el vector $m=(100,5,1,1,100)$, se generan sintéticamente 5 medidas con semiespaciados interelectrónicos $AB/2=(1,10,50,90,200)$. Dichas medidas están afectadas por un error cuadrático medio del 5%. En la figura 1 se representa el corte por el plano espesor-resistividad de la segunda capa, de la norma euclídea del error relativo con el que distintos modelos de tres capas resuelven dicho problema inverso sintético. Se observa la aparición de valles estrechos y alargados, de fondo prácticamente plano, en cuyos puntos el valor de la función objetivo $\Phi(m)$ apenas se diferencia de su valor en el mínimo global. Con seme-

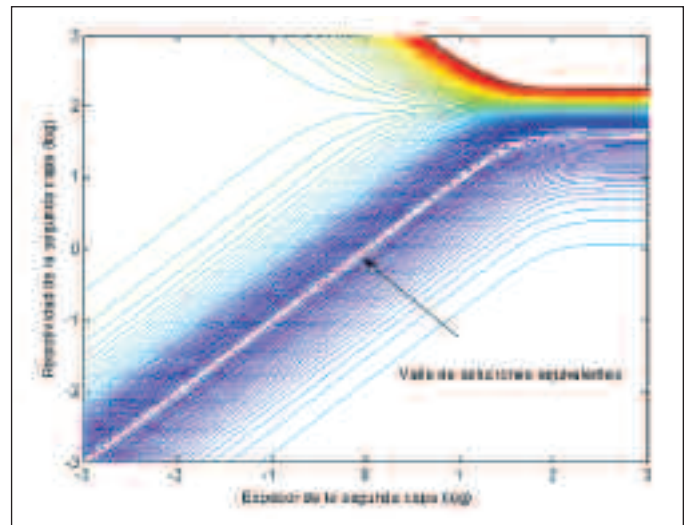


Fig. 1: Soluciones equivalentes y topografía de la función objetivo. Cabe observar la forma de valle alargado y plano de soluciones equivalentes. Ambos parámetros se han graficado en escala logarítmica en el intervalo (-3,3)

Fig. 1: Equivalent solutions and topography of the objective function: contour level map (log-log) showing the relative discrepancy between predictions and data. Remark the diagonal elongated valley containing the equivalent model solutions with very good data matching

jante topografía de la función objetivo, cualquier punto del valle identificará un modelo de terreno que producirá un ajuste razonable de los datos. Si además, por ejemplo tratásemos de identificar el modelo de dos capas que mejor ajusta las resistividades aparentes medidas en tres puntos diferentes, afectadas por un error relativo esta vez del uno por mil (extraordinariamente inferior al admitido en la práctica) obtendríamos los resultados que se muestran en la figura 2.

Las conclusiones que cabe extraer son las siguientes:

- El error aleatorio cometido en las medidas afecta a la solución, amplificándose notablemente, de modo que modelos capaces de conseguir ajustar los datos con tolerancia del uno por mil se sitúan en una nube con alta dispersión.
- Dicha dispersión es diferente para cada parámetro: si bien la dispersión de suponer un error relativo del 10%, admisible en la práctica, el error relativo en ρ_2 (1000%) es completamente inadmisibles.
- Existen orientaciones específicas del espacio donde la inestabilidad es claramente superior. Dicha anisotropía se relaciona con la orientación de los valles de la función objetivo.

Los comentarios precedentes exponen los rasgos generales de una situación problemática para la calidad del proceso de interpretación geofísica: las solu-

ciones parecen responder de manera bastante errática a ínfimos cambios en las medidas. La constatación de este hecho produce, frecuentemente, decepción en cuanto a las posibilidades de las técnicas geofísicas y la sensación de moverse en un círculo vicioso: *para identificar la solución, casi habría que conocerla previamente.*

En este artículo se sugiere que esta dificultad es consecuencia de formular el problema como uno de identificación de parámetros y se plantea un concepto distinto de problema inverso más adaptado a las necesidades prácticas y a la toma de decisiones. Se parte del hecho de que el interés real de la interpretación geofísica es lograr traducir datos e informaciones varias en predicados sobre aquellas características de la solución en las que se pueda fundamentar la toma de decisiones. El enfoque clásico, de estimación de parámetros, presupone que lo realmente importante para decidir es el valor de los parámetros del modelo (ej. m_{sol} en ecuación [2]). No obstante, muchas veces el interés real se centra en descubrir la presencia de patrones interpretables y tendencias en la estructura del subsuelo (Scales y Snieder, 2000). Cierta patrón, por ejemplo: bajas resistividades a partir de una determinada profundidad, puede ser compartido por varios modelos que, por lo demás, pueden ser muy diferentes de m_{sol} . Si la toma de decisiones no se basa en los valores de los parámetros, sino en ciertas características que dependen de ellos, debe ponerse en cuestión la utilidad misma de estimar un modelo.

Por otro lado, la *toma de decisiones* en condiciones de riesgo se basa en la teoría de la probabilidad. Lo interesante sería disponer de una metodología según la cual, los modelos que mejor ajustasen los datos y fuesen más consistentes con otras informaciones apareciesen como más probables. Resolver un problema inverso se convierte así en inferir la distribución de probabilidades de la solución teniendo en cuenta los datos observados y la información a priori (Tarantola y Valette, 1982 a, b).

En este sentido, la estadística Bayesiana es una herramienta formidable (Tarantola, 1987; Menke 1989; Kass y Wassermann, 1996; Scales y Snieder, 1997; Battacharya y Sen, 2003; Malinverno y Torres-Verdín, 2000; Malinverno y Briggs, 2004). En este nuevo enfoque, el conjunto de soluciones equivalentes ya no se percibe como un problema que produce desorientación o conclusiones equivocadas, sino la población sobre la que se hace la estadística necesaria para la toma de decisiones. Además, según el mal planteamiento del problema disminuye la distribución a posteriori de probabilidades que se deduce de resolver el problema inverso se hace más apuntada.

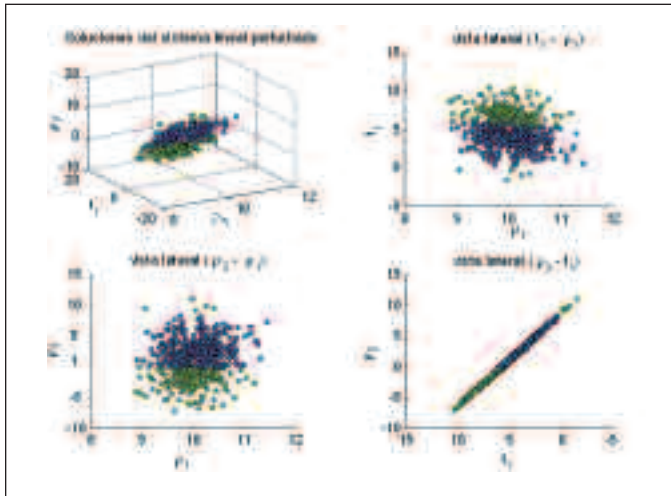


Fig. 2: Inestabilidades en la solución de un problema inverso lineal con datos perturbados (0.1 %). La solución exacta del problema no perturbado se encuentra en el punto [10, 5, 1]. Las soluciones obtenidas poseen direcciones preferentes de anisotropía. Cabe observar la presencia de un subconjunto de soluciones que carecen de significado físico (valores negativos)

Fig. 2: Instabilities in the solution of a linear inverse problem with perturbed data (10% of noise level). Exact solution lies on the point [10, 5, 1]. Obtained solutions follow anisotropic directions and some of them do not make physical sense

Los denominados métodos globales de optimización encajan muy bien en un problema inverso concebido como de inferencia estadística. Entre sus ventajas cabe citar que exploran de modo probabilístico todo el espacio de modelos M y pueden “escapar” de los mínimos locales. Localizan, por tanto, el óptimo global, si existe. Más allá de su capacidad de convergencia, pueden ser usados para explorar (muestrear) ciertas regiones de interés.

En este trabajo se han empleado dos métodos de optimización global: simulated annealing (S.A) y algoritmos genéticos (A.G). Forman parte de una misma familia de métodos (Ingber, 1989; Ingber y Rosen, 1992), y han sido utilizados en la solución del problema inverso en S.E.V (Battacharya y Sen, 2003).

Los algoritmos globales y la formulación “clásica” del problema inverso

Los algoritmos globales pueden utilizarse, con éxito, para resolver cualquiera de los siguientes problemas:

- 1.

$$m_{sol} : \Phi(m_{sol}) = \min_{m \in M \subset \mathbb{C}^{2n-1}} \Phi(m) = \min_{m \in M \subset \mathbb{C}^{2n-1}} \|W[\rho_{ap} - F(m)]\|_2^2 \quad [3].$$

2. Hallar

$$m \in M : \|F(m) - \rho_{ap}\| < tol \quad [4]$$

La formulación [3] es el problema clásico de mínimos cuadrados (Menke, 1989). La formulación [4] es diferente, pues permite obtener un conjunto de modelos que ajusten los datos dentro de cierta tolerancia especificada y es importante para la caracterización de las zonas de equivalencia. Obsérvese, asimismo, que la norma empleada en [4] no tiene, necesariamente, porque ser la norma euclídea, puesto que los algoritmos globales sólo realizan evaluaciones *funcionales*.

Métodos globales de optimización: simulated annealing y algoritmos genéticos

Simulated annealing

Se trata de un método de optimización global cuyo nombre remite a un procedimiento de obtención de

diferentes estructuras cristalinas estables. Si se piensa en un material en estado líquido, el enfriamiento instantáneo a temperaturas suficientemente bajas produciría su congelación y los átomos quedarían “atrapados” en una posición muy similar a la que ocupaban previamente en el líquido. Este estado congelado tiene una energía superior a la del ordenamiento cristalino, pero no tiende a ella espontáneamente porque existe una barrera de energía intermedia. Para “elevar” la energía por encima de la de esta barrera, se puede calentar el sólido “congelado” hasta llevarlo nuevamente al estado líquido. Si, ahora, en lugar de enfriar bruscamente, se disminuye lentamente la temperatura, los átomos tendrán tiempo de explorar numerosas posiciones antes de quedar atrapados en aquellas que correspondan a las de menor energía de todas las visitadas. Cuanto más lento sea el enfriamiento, más probable es que la sustancia “cristalice” en el estado de mínima energía de todos los posibles a cierta temperatura. Este proceso se denomina recocido y se utiliza para eliminar defectos en cristales.

El S.A se introdujo en el ámbito de los métodos numéricos en la década de los 50 con el trabajo de Metrópolis y sus colaboradores (1953), en mecánica estadística. La primera aplicación en optimización numérica se debe a Kirkpatrick *et al.* (1983). Se trataba de minimizar la longitud de las conexiones en un circuito integrado.

Elementos característicos del método

Se describe ahora el método de S. A cuyo código ha sido desarrollado por los autores. Considerado como técnica de optimización, S.A. precisa los siguientes elementos:

1. Sorteo aleatorio de propuesta de modelos: Este criterio permite calcular nuevos modelos de la denominada *vecindad* del modelo actual. Éstos serán valorados y se aceptarán o no. Inicialmente, conviene que las propuestas exploren zonas relativamente alejadas del modelo actual. Sin embargo, a medida que se producen progresos en términos de lograr buenas aproximaciones a la solución, es bueno acotar la exploración a la zona interesante. Se ha empleado o bien una *ley Gaussiana* o bien una *ley uniforme* de probabilidad del nuevo modelo en el espacio de búsqueda. La búsqueda se hace más local siempre a medida que progresa el algoritmo.
2. Un criterio de aceptación o rechazo de los modelos propuestos. Suele emplearse la ley de

Boltzman que es, además, la que dio origen al método:

$$p(\Delta E) = e^{-\frac{\Delta E}{T}} \quad [5]$$

Donde ΔE es el cambio en el valor de la función objetivo, o sea $\Delta E = \Delta \Phi$, y T es un parámetro denominado temperatura. Si $\Delta E < 0$, el movimiento se acepta siempre. Cuando $\Delta E > 0$, el movimiento *podría aceptarse* con probabilidad $p(\Delta E)$ indicada por [5]. Si T es alta, es muy posible que se acepte un cambio de un modelo a otro peor -con una función objetivo mayor-. Esta probabilidad disminuye para valores de T bajos. Al inicio, conviene no quedar atrapado en mínimos locales -pues se busca el mínimo global- y el valor de T debe ser alto. A medida que continúa el proceso, debe ir disminuyéndose la probabilidad de salir de los mínimos encontrados -sin terminar por anularla totalmente-. Esto se consigue reduciendo T .

3. Un patrón de enfriamiento o curva de evolución de la temperatura, para que el modelo obtenido tienda a estabilizarse alrededor del mínimo global. Debe considerarse tanto la elección de la temperatura inicial como la evolución de la misma a lo largo del algoritmo.

a. Elección de la temperatura inicial

En la práctica se suele calcular la temperatura inicial como aquella que permite aceptar (según la ley de Boltzman) un incremento del 50% ($\delta = 0.5$), u otro factor porcentual del valor inicial de la función objetivo (f_0) con una probabilidad p_0 (por ejemplo del 70%). Matemáticamente:

$$T_0 = -\frac{\delta \cdot f_0}{\log p_0}$$

b. La curva de enfriamiento

El patrón de enfriamiento refleja la evolución de la temperatura con el número de iteraciones. Resumiendo las distintas modalidades citadas en la literatura, cabe enfriar con un *patrón aritmético*, a decrementos constantes de temperatura en cada paso; con un *patrón geométrico*, donde las temperaturas decrecen según una progresión geométrica de razón especificada por el usuario; con *patrón logarítmico*, que implica un decrecimiento de la temperatura con el inverso del logaritmo del número de iteraciones o bien con un *patrón inverso*, donde la temperatura decrece de forma inversamente proporcional al número de iteración.

Criterios de parada

Que indican cuándo se ha llegado a una solución razonable. Se considera que esto ocurre cuando el valor de la función objetivo es inferior a la tolerancia especificada o no ha mejorado en un porcentaje determinado tras un número de iteraciones estipulado. Cuando lo que se persigue es muestrear la distribución a posteriori de probabilidades, el algoritmo se para por iteraciones.

Algoritmos genéticos

El término se inspira en la teoría darwinista de selección natural. Según esta teoría, las especies evolucionan hacia estructuras genéticas mejor adaptadas al entorno mediante la transformación del código genético individual por mutación y recombinación sexual, siendo inviables los cambios introducidos que perjudiquen al individuo en el medioambiente en el que vive. Los A.G son notablemente útiles para problemas con funcionales discontinuos o mal condicionados. En los A.G toda una población de modelos se transforma, de una iteración a otra, evolucionando hacia el óptimo global.

Descripción básica del funcionamiento de un A.G

Se parte de una población inicial de modelos generada de modo aleatorio, cada uno de los cuales se representa mediante una cadena de elementos de un alfabeto, llamada cromosoma. En términos de un problema de optimización, cada cromosoma representa un modelo candidato a solución.

A cada posición del cromosoma se la denomina locus genético y a la información allí situada, *gen*. Puede haber distintas formas del mismo gen, los denominados alelos. En este contexto, los alelos son los distintos elementos del alfabeto escogido. La elección del alfabeto - Λ - para codificar las variables del problema, así como la longitud del cromosoma son cuestiones delicadas que influyen en el éxito de la técnica. El alfabeto binario, por ejemplo, emplea los símbolos $\Lambda_{\text{binario}} = \{0, 1\}$, cada modelo quedaría representado (codificado) mediante una cadena -cromosoma- de ceros y unos:

modelo 1 \rightarrow

1	0	1	...	0
---	---	---	-----	---

modelo 2 \rightarrow

0	1	0	...	1
---	---	---	-----	---

El uso de otros alfabetos también es posible; por ejemplo, puede emplearse como alfabeto el conjunto de todos los números reales $\Lambda_{aritmético} = \{ \}$ (codificación aritmética).

Esquema de funcionamiento de un algoritmo genético

Se comienza con una población inicial, cuyo tamaño es necesario especificar. A partir de ésta se van produciendo sucesivas poblaciones -generaciones- que tienen, normalmente, el mismo tamaño que la inicial. Este número ha de ser lo suficientemente pequeño para que el proceso sea manejable y lo bastante grande como para que la población considerada tenga posibilidades de explorar todo el espacio de búsqueda.

A cada individuo -cromosoma- de la población hay que atribuirle un valor que lo ordene respecto a los demás. Este valor se denomina aptitud o idoneidad. Para este fin se utiliza una función *relacionada con* la función objetivo del problema de optimización. Si el problema es de maximización, la propia función objetivo puede servir como criterio para asignar aptitudes: a mayor valor de la función objetivo, mayor aptitud. Sin embargo, si el problema es de minimización, la función de aptitud *no puede ser* la función objetivo, puesto que el algoritmo genético pretenderá siempre maximizarla, sino que deberá ser una función relacionada con ella según distintos procedimientos denominados de *escalado*. Este suele ser el caso de los problemas inversos en los que se minimiza una función de desajuste.

De acuerdo con los valores de la aptitud, se procede a la selección de los cromosomas más aptos de la población actual, que son los que intervendrán en el proceso de reproducción; a partir de ellos se construirá la siguiente generación. Existen distintos procedimientos de selección, así como distintos criterios (criterios de reemplazo) para determinar qué individuos de la generación actual son sustituidos en la siguiente.

El proceso de transformación de una generación de cromosomas en la siguiente se lleva a cabo a través de la aplicación de distintos operadores genéticos. Intervienen, esencialmente, dos tipos de operadores: la recombinación o cruce y la mutación.

A la nueva población obtenida se le aplica el mismo proceso previo hasta que se cumplan los criterios de parada especificados. Normalmente, éstos tienen que ver con que se haya alcanzado un grado de aptitud o un número estipulado de generaciones.

Proceso de Selección. Mecanismos

La selección dirige el proceso de búsqueda en el

espacio de posibles soluciones. Asigna a cada individuo una probabilidad de reproducirse, en relación directa con su aptitud. La selección tiende a concentrar la exploración en regiones del espacio de búsqueda cada vez mejores desde el punto de vista de la aptitud de sus modelos. Su objetivo es conseguir un balance entre la búsqueda en la región más prometedora y en el resto de regiones de forma que se evite la convergencia demasiado temprana a una zona que, quizás, sólo contenga un óptimo local. Una vez calculadas las probabilidades individuales, cada mecanismo selecciona un cierto número de progenitores mediante sorteo. Los mecanismos de selección difieren en la forma de asignar probabilidades:

1. Selección proporcional: a cada individuo se le asigna una probabilidad de selección proporcional a su aptitud:

$$p(S_i, t) = \frac{f(S_i, t)}{\sum_{j=1}^N f(S_j, t)}, i = 1, 2, \dots, N,$$

donde $f(S_i, t)$ es la aptitud del cromosoma S_i en la generación para tiempo t . Este mecanismo depende mucho del valor concreto de la aptitud, permitiendo que un individuo que, sin ser óptimo, posea una aptitud muy superior a la del resto, domine rápidamente la población, causando la convergencia prematura a un óptimo local. Otros mecanismos, como los siguientes, dependen menos de la atribución de aptitudes concretas y evitan este problema.

2. Selección por posición: los individuos son ordenados en orden ascendente de aptitud y la probabilidad de selección es función de la posición que éste ocupa tras el reordenamiento de las aptitudes.
3. Selección por torneo: Es el método más usado. La selección k -torneo elige k individuos de forma aleatoria y retiene al más apto. Este proceso se repite hasta haber seleccionado tantos individuos como indica la talla de la población. Un tamaño típico para k es 2.

Operadores genéticos

Los operadores genéticos transforman los individuos de la población en nuevos individuos, siendo responsables de su evolución. Los operadores genéticos más empleados comentados aquí son el operador de cruce y el operador de mutación.

1. Operador de cruce

Consiste en combinar partes de los individuos padres para formar un nuevo individuo (o más de uno). Los cromosomas progenitores son escogidos *aleatoriamente* para proceder, luego, al intercambio de material genético, conservándose las partes comunes del cromosoma.

La forma tradicional de hacer el cruce de individuos es la que se llama cruce puntual. Se genera de forma aleatoria un punto de cruce -el mismo en los dos cromosomas progenitores- y después se intercambian los segmentos de los padres antes o después de ese punto generando así uno o dos individuos nuevos.

2. Operador de mutación.

Este operador cambia, en posiciones *aleatoriamente escogidas* del cromosoma, un alelo por otro. Su efecto es introducir información nueva de manera aleatoria. Considerado uno cualquiera de los alelos, la probabilidad de que resulte mutado se suele mantener pequeña (entre 0.001 y 0.1). Este operador es también útil para reintroducir información perdida en la población debido a convergencia prematura. Existen diferentes mecanismos de mutación (Michalewicz, 1992). Los más importantes son:

a. Mecanismo de mutación uniforme:

La variación de un gen sigue una ley uniforme invariable a lo largo del proceso.

b. Mutación no uniforme:

En este caso el valor del gen seleccionado se modifica según una ley de probabilidad no uniforme que se hace más apuntada según avanza el algoritmo, es decir, disminuye la exploración según nos acercamos al final de su ejecución.

Otros parámetros también influyentes en el algoritmo son:

- El tamaño de la población
El requisito importante de una población dada es que represente de forma adecuada todo el espacio de modelos. Dos factores se tienen en cuenta al determinar el tamaño de la población: diversidad y convergencia. En el caso de S.E.V, los resultados empíricos muestran que con tamaños de población superiores a 50 "individuos" se obtienen ya resultados aceptables.
- La población inicial
Normalmente la población inicial se genera con una distribución uniforme en todo el espacio de búsqueda. Sin embargo, si se posee algún conocimiento sobre la solución, debería emplearse en

su generación. Es de esperar que, al hacerlo, se consiga la convergencia más rápidamente.

- La estrategia de reemplazo
 - el reemplazo generacional y el elitismo
Es la forma tradicional de proceder. Si N es el tamaño de la población, se generan siempre N descendientes y toda la población es sustituida en cada iteración. El problema es que así no se garantiza que el mejor cromosoma de la población actual sobreviva en la próxima generación. Para evitar esto se usa la estrategia elitista en la cual, los mejores individuos de la población actual se mantienen en la siguiente generación.
 - el reemplazo estacionario
Sólo un pequeño número de individuos, normalmente uno o dos, son reemplazados en cada generación. Se suele escoger el individuo o individuos menos aptos o alguno de aptitud inferior a la media.
- La definición de la aptitud, como versión escalada de la función objetivo del problema.
- Los criterios de parada, especificando un número máximo de iteraciones, un nivel de mejora relativa en cada generación o un cierto umbral de aptitud.

El enfoque Bayesiano

La expresión fundamental empleada en la inferencia bayesiana es la regla de Bayes que, para el propósito de este trabajo puede escribirse como (ej. Malinverno, 2000):

$$p(m/d,H) = \frac{L(d/m,H) p(m/H)}{p(d/H)} \propto L(d/m,H) p(m/H), \tag{6}$$

En la inferencia Bayesiana, todas las probabilidades están condicionadas al suceso H , que representa un conjunto de proposiciones, supuestas verdaderas, denominado información a priori. $f(m/H)$ es la f.d.p a priori sobre el espacio de modelos, M , y refleja lo que se conoce de m a partir, *únicamente*, de $H.L(d/m, H)$, definida también sobre M , se denomina función de verosimilitud y cuantifica la probabilidad de que ocurra el dato d para cada vector de parámetros de modelo m . Un dato, ya obtenido experimentalmente, se hace más verosímil (o sea, más probable), para unos valores de m que para otros. $f(d/H)$ recibe el nombre de verosimilitud marginal o evidencia y refle-

ja la influencia que ejercen las hipótesis a priori en H sobre cada dato d , a través de *todos* los modelos. Más explícitamente:

$$f(d/H) = \int_M L(d/m, H) f(m/H) dm$$

Dado que $f(d/H)$ no depende de m , aparece como una constante de normalización en la expresión [6], donde m se considera variable.

El objetivo es calcular $f(d/H)$, la distribución de probabilidad a posteriori, que contiene toda la información sobre los modelos m , a la luz de los datos observados d y de la información a priori.

En este trabajo H reúne, entre otras, las siguientes hipótesis:

1. La distribución de los errores de medida puede considerarse como gaussiana multivariante con vector de medias μ y matriz de covarianza Σ , conocidos. En nuestro caso es el vector nulo (predicciones teóricas exactas) y Σ es diagonal (observaciones incorreladas). La expresión es, pues:

$$L(d/m, H) = \frac{1}{((2\pi)^{2n-1} \det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[(d-F(m))^T \Sigma^{-1}(d-F(m))]}$$

donde $2n-1$ es el número de parámetros de modelo.

2. El funcional F es el funcional tradicional del problema directo para S.E.V. Incluye, por tanto, todas las hipótesis de construcción del espacio de soluciones mencionadas anteriormente.
3. Las soluciones m pertenecen a un subespacio de búsqueda $E_B \subset M$, conocido.
4. $f(m/H)$ se elige uniforme en E_B .

La distribución a posteriori $f(m/d, H)$, solución del problema inverso bayesiano, puede no ser explícitamente calculable o difícil de describir (Mosegard y Tarantola, 1995). Por esta razón, es muy importante disponer de un algoritmo capaz de muestrear el espacio de búsqueda $E_B \subset M$ de acuerdo con $f(m/H)$. Con un algoritmo así, zonas de igual tamaño en E_B serán visitadas un número de veces proporcional a su probabilidad a posteriori. Tal estrategia se denomina muestreo por importancia. Las dificultades numéricas para realizar un muestreo adecuado han sido ilustradas entre otros por Curtis y Lomax (2001).

Algunas ventajas del muestreo por importancia del espacio de modelos son:

1. El cálculo de la probabilidad a posteriori de una zona determinada de E_B reduce a un cálculo de porcentajes de modelos muestreados en E_B .

2. La probabilidad de que la solución del problema posea ciertas características de interés, expresables mediante una función matemática Ψ , se reduce al conteo de los modelos para los que dicha función toma valores en el rango de interés I .

$$p(\Psi \in I) = p^* \{m \in M / \Psi(m) \in I\}$$

Mosegard y Tarantola (1995) especifican las condiciones para que un algoritmo muestree según la distribución a posteriori. Tal algoritmo tiene dos etapas.

1. A partir de un modelo m se sortea otro candidato m_c según la distribución a priori $f(m/H)$.
2. El modelo propuesto m_c se acepta con probabilidad

$$\beta = \min \left[1, \frac{L(d/m_c, H)}{L(d/m, H)} \right]$$

Cuando S.A se emplea, con las hipótesis incluidas en H , utilizando como función de aceptación la ley de Boltzmann, se cumplen las condiciones anteriores y, por lo tanto, la historia de los modelos obtenidos hasta la convergencia puede considerarse una muestra representativa para el cálculo de frecuencias que estimen la distribución a posteriori.

En este trabajo, se valora la posibilidad de emplear, además, los algoritmos genéticos para realizar la misma tarea (Fernández Álvarez et al., 2004, a). La comprobación de tal hipótesis se ha realizado por dos vías independientes:

1. Caso de distribución a posteriori representada mediante funciones sintéticas 2D, relativamente simples y con similitud con el a posteriori del problema real.
2. Caso real, de distribución a posteriori desconocida, pero que ha sido estimada previamente mediante S.A. Se comprueba si los A.G. reproducen los resultados.

Muestreo sobre funciones sintéticas

Para varias funciones sintéticas (función cono y función Gaussiana) y en condiciones muy generales de experimentación, se ha observado una reproducción muy aceptable de varias estadísticas, especialmente en las zonas de verosimilitud alta (las importantes). La estrategia ha consistido en emplear una función de aptitud proporcional a la función de verosimilitud. La

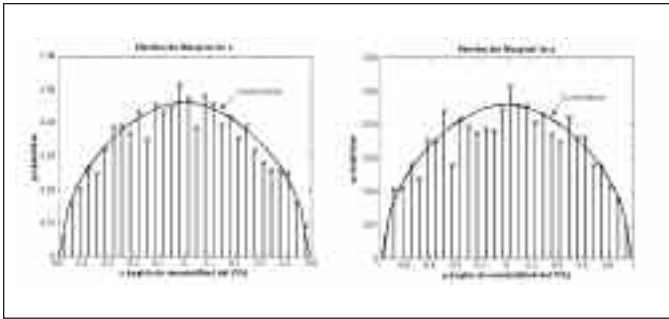


Fig. 3: Distribución marginal teórica de la función test como y distribución empírica deducida mediante A.G. El histograma de frecuencias elaborado con las muestras generadas por A.G reproduce de manera aceptable la distribución teórica, lo cual confirma que se está realizando adecuadamente el muestreo por importancia de dicha función considerada como a posteriori

Fig 3. Cone function. Visual inspection of a typical match between theoretical marginal density function and histogram inferred with G.A. models in the 50% likelihood region. The accurate reproduction of the histogram indicates that GA performs correctly importance sampling for this test function

figura 3 ilustra, si se usa como función sintética un cono 2D, la alta calidad de la reconstrucción de los histogramas de probabilidades marginales teóricos mediante A.G. La figura 4 representa las funciones de distribución acumuladas en función del nivel de verosimilitud para modelos cuya verosimilitud es superior a tres umbrales especificados (0.02, 0.06 y 0.09). La verosimilitud máxima es 0.12. Cabe observar cómo cuando el muestreo se realiza en la región de verosimilitud superior a 0.09 (>75% del máximo) la curva proporcionada por los A.G. coincide prácticamente con la curva teórica y con la inferida mediante S.A. Para valores de verosimilitud bajos, que incluye modelos con verosimilitud mínima de 0.02 -15% del valor máximo-, el A.G. subestima las probabilidades, mientras que S.A. sigue estimándolas correctamente. En el caso de A.G. elitistas o con mecanismos de selección diferentes a la ruleta (p. ej. ranking normalizado) el A.G. sobreestima las probabilidades reales (como se muestra en la curva obtenida sobre la región de verosimilitudes mayores de 0.06 o 50% del máximo). Por tanto, el uso de un A.G. en combinación con un proceso de selección de tipo ruleta consigue muestrear razonablemente la distribución a posteriori del problema en las zonas de alta verosimilitud. Los resultados obtenidos parecen robustos frente a la elección del resto de los parámetros de A.G, en tanto las probabilidades de mutación sean superiores al 20%, es decir, que el A.G. posea una capacidad moderada de exploración.

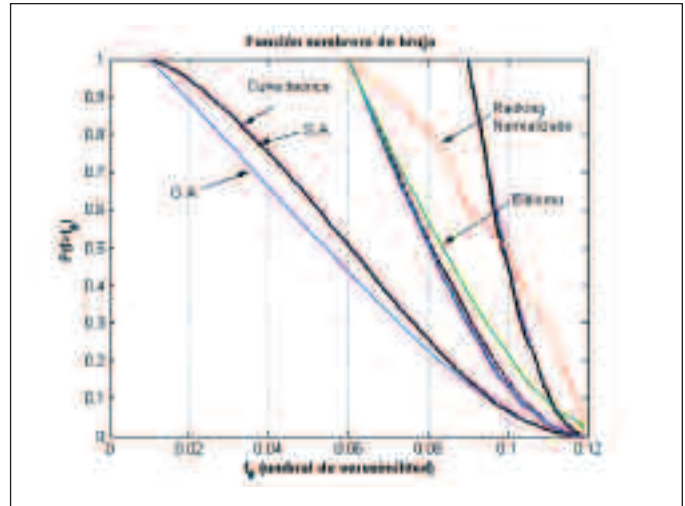


Fig. 4: Función cono (sombbrero de bruja). Funciones de verosimilitud teóricas y determinadas numéricamente mediante algoritmos genéticos y simulated annealing. Se ilustra el resultado de explorar tres regiones distintas identificadas por su nivel mínimo de verosimilitud (0.02, 0.06 y 0.09) que representan respectivamente porcentajes de verosimilitud superiores al 15%, 50% y 75% del máximo (0.12)

Fig 4: Cone hat function: theoretical and empirical cumulative distributions using S.A and binary G.A. S.A matches always theoretical results. For G.A this depends upon the size of the domain (threshold value). Best matching curves for roulette selection lies around 50-60% maximum probability. See also deviations in case of normalized ranking or elitism are employed

Aplicación del muestreo a un problema de decisión medio-ambiental

La metodología expuesta se ha aplicado a un sondeo costero en la zona de Águilas (Murcia), para la localización de una posible intrusión marina (IGME, 1988). Conocida la litología cabe esperar los siguientes tramos geoelectrónicos:

- Niveles superficiales de cuaternario, con variaciones locales de resistividad,
- Tramos más resistivos de cuaternario de resistividad variable,
- Niveles miocénicos y pliocénicos de baja resistividad y
- Zócalo paleozoico del permotriás con resistividad variable en función del grado de esquistosidad.

Para ilustrar la metodología realizaremos la interpretación del S.E.V más costero de la zona de estudio (Águilas 11-a, figura 5). Para la interpretación de dicho sondeo hemos utilizado un modelo de 6 capas. En dicho estudio el IGME situaba la intrusión salina a 34 metros de profundidad aproximadamente.



Fig. 5: Zona de estudio. Mapa geológico de la zona de Águilas y situación del sondeo costero 11-a (cortesía del Instituto Geológico Minero de España, 1988)

Fig. 5: Study area. Geological map of Aguilas and situation of the coastal VES 11A (from the Instituto Geológico Minero de España, 1988)

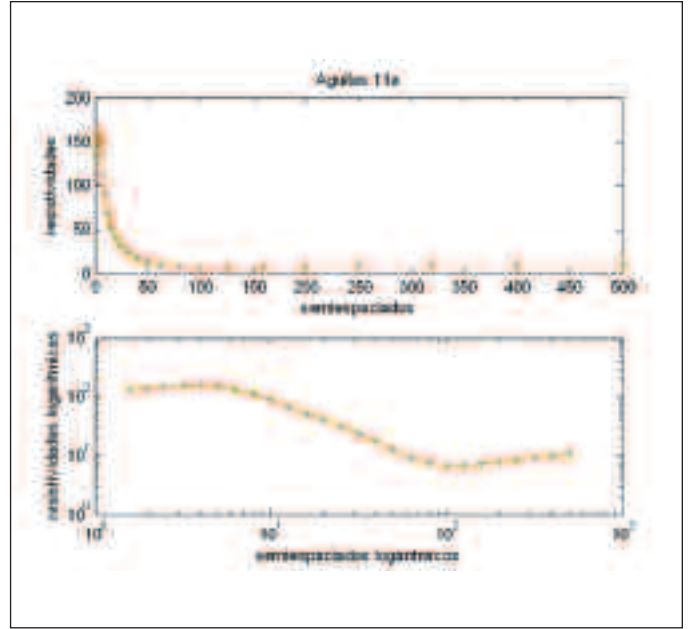


Fig. 6: Curva de resistividades aparentes observadas y ajuste mediante un modelo de seis capas

Fig. 6 Empirical apparent resistivity curve and fitting obtained with a 6 layers geo-electric model

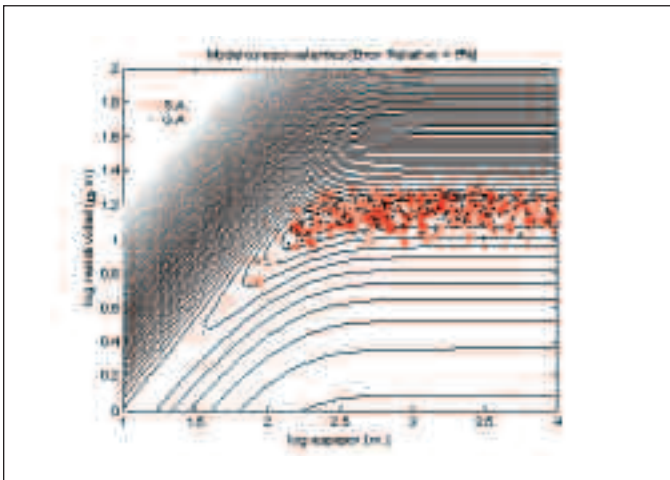


Fig. 7: Sección de la función objetivo por los parámetros de la capa susceptible de ser caracterizada como intrusión. Obsérvese como los algoritmos genéticos y simulated annealing colocan modelos en la zona de interés (valle de la función objetivo. Los espesores de los modelos equivalentes varían aproximadamente entre 100 y más de 10000 metros en dicha zona

Fig 7. Contour map section of the objective function in the parameters affected by the salt intrusion. GA and SA locate the models in the equivalent zone. Thickness in this area varies between 100 and 10000 meters

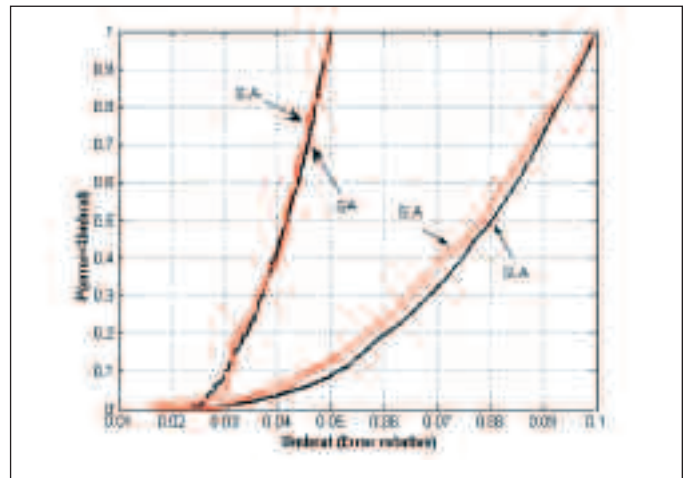


Fig. 8: Funciones de distribución empíricas de los errores de los modelos detectados mediante simulated annealing y algoritmos genéticos en las regiones de interés de errores relativos menores que el 5% y el 10% respectivamente

Fig. 8: Empirical distribution functions for the misfit of models found by SA and GA in the regions of 5% and 10% errors

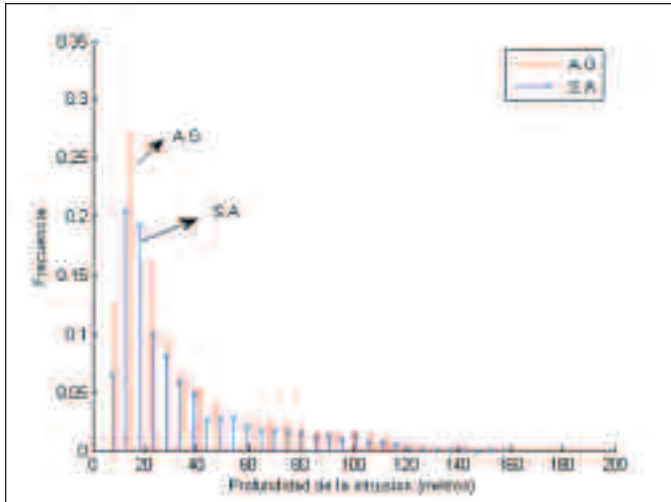


Fig. 9: Histograma de profundidad de la intrusión deducido a partir de los modelos de terreno hallados mediante simulated annealing y algoritmos genéticos en la región de interés (errores relativos inferiores al 10%). La coincidencia entre ambos métodos de muestreo es notable. La cola larga del histograma pone de manifiesto la poca definición espacial del método de sondeos eléctricos verticales en dicha región

Fig. 9: Histograms for the depth of the intrusion deduced from the models found by SA and GA in the region of error less than 10%. Coincidence between both methods is high. The long tail of the histogram implies the low spatial resolution of the VES method

En el proceso de inversión geofísica no ha estado disponible ningún otro tipo de información a priori adicional que hubiese podido permitir restringir el rango de soluciones admisibles.

La figura 6 muestra la curva de resistividades de dicho sondeo y el ajuste obtenido con uno de los mejores modelos de terreno de la zona de equivalencia.

La figura 7 muestra un corte de la función objetivo por los parámetros de resistividad y espesor, ambos en parametrización logarítmica, de la capa susceptible de ser caracterizada como intrusión. Los modelos equivalentes con un error relativo inferior al 5% muestreados mediante S.A. y A.G. se sitúan en una zona de valle paralelo al eje de espesores y que se curva en su extremo izquierdo adoptando una orientación aproximada de 45° en ejes logarítmicos. La figura 8 representa las funciones de distribución acumulada empíricas de los errores de los modelos muestreados por S.A. y A.G. en las regiones con errores relativos menores que el 5% y el 10% respectivamente. Cabe observar que en las zonas con errores inferiores al 5% ambos algoritmos proporcionan idénticos resultados en el conteo de modelos. En la zona de errores más amplios

(10%) los A.G. subestiman la proporción de modelos detectados mediante S.A.

El objetivo de nuestra inversión geofísica es lograr una caracterización de la distribución de probabilidades a posteriori de las variables de interés. Como variable útil, en este caso, se ha tomado la profundidad de la posible intrusión Z_i . La intrusión se considera presente cuando la resistividad de una capa sea igual o inferior a un umbral de resistividad ρ_u , que se considera como parámetro del problema. Así pues, la profundidad de la intrusión será igual a la suma de las potencias de todas las capas hasta aquella cuya resistividad esté por debajo del umbral, o sea:

$$\Phi = Z_i, \quad y \quad Z_i = \sum_{j=1}^{j=j_{int}} Z_j \quad \text{con} \quad j_{int} = \min\{j, \rho_j < \rho_u\}$$

Para estimar la distribución a posteriori se han empleado tanto S.A. como A.G.

De cara a la comparación de los dos procedimientos se muestra el histograma que aproxima la *f.d.p a posteriori* de la profundidad de la intrusión (figura 9) así como la función de distribución acumulada de la misma para una resistividad umbral de 10 ohmiosmetro (figura 10). En ambos casos se ha trabajado con los modelos de terreno equivalentes cuyo error relativo es inferior al 8%. Se observa la coincidencia de los resultados proporcionados por S.A. y A.G. Asimismo resulta notable la asimetría del histograma, que se debe al aumento de incertidumbre con la profundidad de investigación. La mediana deducida a partir de la función de distribución empírica (figura 10) y la moda del histograma (figura 9) están en torno a 20 metros.

Desde el punto de vista de la toma de decisiones, se ha construido un ábaco que representa, para cada umbral de resistividad, la profundidad a la que se encontraría la distribución con una probabilidad prefijada (figura 11). Se hace referencia a dicho ábaco como curvas de percentiles. Cabe observar como con un 50% de probabilidades la intrusión se situaría por encima de los 25 metros. Si la decisión debe de ser tomada con un 90% de probabilidades la profundidad de la intrusión debería situarse por encima de los 90 metros. En todos los casos las curvas parecen mostrar un mínimo en un umbral de resistividad alrededor 4-7 Ohmiosmetro.

Conclusiones

Las principales conclusiones de este trabajo son las siguientes:

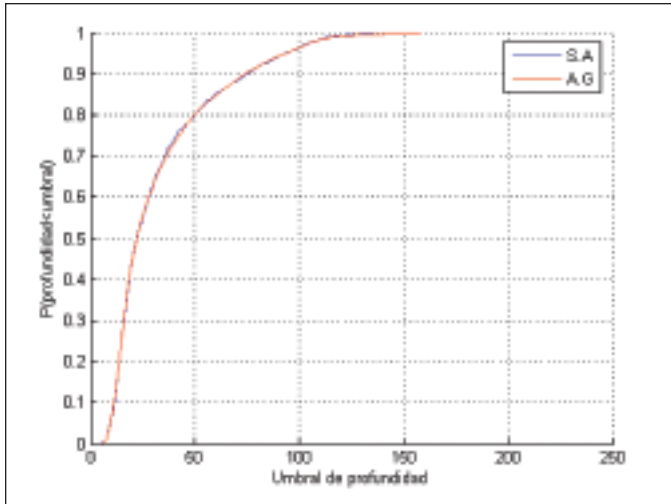


Fig. 10: Función de distribución empírica de la profundidad de la intrusión para un umbral de resistividad de 10 Ohmio-metro, deducida a partir de los modelos de terreno hallados mediante simulated annealing y algoritmos genéticos en la región de interés (errores de inversión relativos menores que el 10%). La coincidencia entre ambos métodos de muestreo es absoluta. La probabilidad de que la intrusión esté por encima de 50 metros es del 80%. La mediana es de 20 metros aproximadamente

Fig. 10. Empirical distribution function for the depth of intrusion characterised by a resistivity value of 10, deduced by SA and GA. Coincidence is absolute. Probability of finding the intrusion above 50 meters is 0.8. Median is 20 meters

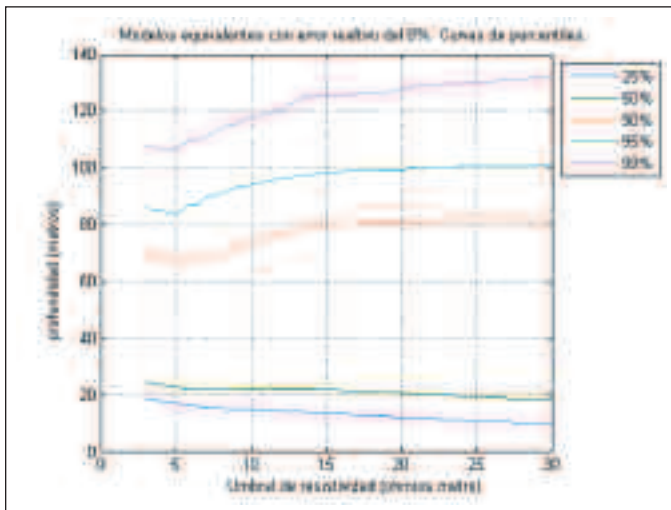


Figura 11: Curvas de percentiles (25, 50, 90, 95 y 99%) de profundidad de la intrusión para diferentes umbrales de resistividad (5 a 30 Ohmios. metro)

Fig. 11: percentile curves (25%, 50%, 90%,95% and 99%) of depth of saline water for different resistivity thresholds (5 to 30 Ohm.m)

El problema inverso en S.E.V posee un abanico amplio de soluciones equivalentes. Si la solución

debe ser un único modelo, esto es una dificultad. Un enfoque distinto y más útil considera que la solución es la distribución de probabilidades a posteriori de la familia de modelos equivalentes. Sobre ella pueden determinarse las probabilidades de ciertos patrones estructurales de interés. En este artículo, este patrón es la profundidad de la intrusión marina.

Se han programado y estudiado el comportamiento de dos métodos de optimización global, S.A y A.G. Los dos son capaces de encontrar el óptimo global en un tiempo similar y razonable (3 a 4 minutos en un Pentium 4 para una población de 200 modelos de terreno de 6 capas y 200 iteraciones, es decir, 40000 resoluciones del problema directo con 11 parámetros), así como de explorar la región de modelos equivalentes, de modo que puedan hacerse interpretaciones estadísticas del conjunto de soluciones equivalentes orientadas a la toma de decisiones.

Como novedad, se ha probado, numéricamente, la capacidad de los A.G. para reproducir de forma muy aproximada las distribuciones en el muestreo del método de Metrópolis-Gibbs, que es el teóricamente correcto, y que implícitamente se pone en práctica al emplear S.A. Dos distribuciones muy apreciadas para la toma de decisiones como son las marginales y las regiones de cierta tolerancia de desajuste aparecen como casi coincidentes. La presencia de elitismo en la selección destruye esa capacidad, al ponderar en exceso la presencia de modelos con aptitudes muy altas.

Los A.G son capaces de realizar este trabajo de muestreo estadístico siempre que el mecanismo de selección sea la ruleta, que como función de aptitud se elija la función de verosimilitud y que se empleen mutaciones superiores al 20%. El interés de utilizar los A.G.

Se ha probado la utilidad de los métodos globales para caracterizar la distribución a posteriori de la profundidad de intrusión salina en una localidad costera, permitiendo la toma de decisión en términos probabilistas.

Agradecimientos

Al IGME, especialmente en la persona de D. Alfredo Iglesias López, en particular, por facilitar el acceso a los datos geofísicos del acuífero de Águilas (Murcia).

Referencias

Battacharya, B.B., Sen, M.K. 2003. Use of VFSA for resolution, sensitivity and uncertainty analysis in 1D DC resis-

- tivity and IP inversion. *Geophysical Prospecting*, 51, pp. 393-408.
- Curtis, A., Lomax, A. 2001. Tutorial: Prior information, sampling distributions and the curse of dimensionality. *Geophysics*, vol. 66, n°2, pp. 372-378.
- Fernández Álvarez P. 2004. *Análisis y resolución numérica de un problema inverso en geofísica medioambiental. Aplicación al caso de los sondeos eléctricos Verticales*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.
- Fernández Álvarez P., Fernández Martínez J.L, y Menéndez Pérez C.O. 2004, a. A posteriori inference of model parameters in a geophysical inverse problem using G.A, in *Soft Methodology and Random Information Systems*. Advances in soft computing, pp.709-711. Elsevier.
- Gosh, D.P. 1971a. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements. *Geophysical Prospecting*, 19, pp.192-217.
- Gosh, D.P. 1971b. Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth. *Geophysical Prospecting*, 19, pp. 769-777.
- Hadamard, J. 1923. *Lectures on Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, CT.
- Hansen, C. 1998. *Rank deficient and discrete Ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*. Philadelphia, Library of Congress.
- Instituto Geológico y Minero de España, 1988. *Prospección eléctrica en Águilas (Murcia)*. Informe inédito.
- Ingber, L. 1989. Very fast simulated reannealing. *Math. Comput. Modelling*, vol 12, n° 8, pp. 967-973.
- Ingber, L., Rosen, B. 1992. Genetic algorithms and very fast simulated reannealing: a comparison. *Math. Comput. Modelling*, vol 16, n°11, pp. 87-100.
- Kass, R. E., Wassermann, L. 1996. The selection of prior distributions by formal rules. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 91, n°435, pp.1343-1396.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, D.D., and Vecchi, M. P. 1983. Optimization by simulated annealing. *Science*, vol 220, pp. 671-680.
- Koefoed, O. 1979. *Geosounding Principles*, 1. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company.
- Malinverno, A., Torres-Verdín, C., 2000. Bayesian Inversion of DC electrical measurements with uncertainties for reservoir monitoring. *Inverse Problems*, 16, pp.1343-1356
- Malinverno, A., Briggs, A.V. 2004. Expanded uncertainty quantification in inverse problems: Hierarchical Bayes and Empirical Bayes. *Geophysics*, v 69, n°4, pp.1005-1016.
- Menke, W. 1989. *Geophysical Data analysis: discrete inverse theory* (revised edition). California, Library of Congress.
- Michalewicz, A. 1992. *Genetic Algorithm + data structures=evolution programs*. Springer Verlag.
- Mosegard, K., Tarantola, A. 1995. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *Journal of Geophysical Research*, vol. 100, n°B7, pp. 12431-12447.
- Orellana, E., Mooney, H.M. 1966. *Master tables and curves for vertical electrical soundings*. Tablas y curvas para sondeos eléctricos verticales (en inglés y español). Interciencia. Madrid.
- Orellana, E., 1982. *Prospección geoeléctrica en corriente continua*. Madrid, ed. Paraninfo.
- Patra, H.P., Nath, S.K. 1999. *Schlumberger Geoelectric Sounding in Ground Water (Principles, Interpretation and Applications)*. A. A. Balkema.
- Pekeris C.L. 1940. Direct method of interpretation in resistivity prospecting. *Geophysics*, vol 5, pp.31-42.
- Scales, J.A., Snieder, R. 1997. To Bayes or not to Bayes?. *Geophysics*, vol. 62, n°4, pp.1045-1046.
- Scales, J.A., Snieder, R. 2000. The anatomy of inverse problems. *Geophysics*, vol 65, n° 6, pp. 1708-1710.
- Slichter, L.B. 1933. Interpretation of resistivity prospecting for horizontal structures. *Physics*, vol 4, pp. 307-322 (and p. 407).
- Stefanescu, S.S., Schlumberger, C. y M. 1930, Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales. *Jour. Physique et le Radium*, v. 1, pp.132-140.
- Tarantola, A., Valette, B. 1982a, Generalized nonlinear inverse problems solved using the linear least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys*, 20, 2, pp.219-232.
- Tarantola, A., Valette, B. 1982b, Inverse problems = quest for information. *J. Geophys*, 50, pp.159-170.
- Tarantola, A. 1987. *Inverse Problem Theory*. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company.
- Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E., 1990. *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, second edition.

Recibido: diciembre 2004

Aceptado: noviembre 2006