

# Evaluación eficiente de la densidad de fracturación

C. Paredes-Bartolomé y F. Flórez-Baquedano

Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos. E.T.S.I. de Minas. UPM. Ríos Rosas 21. 28003 Madrid.  
E-mail: cparedes@dmami.upm.es, fflorez@dmami.upm.es

## RESUMEN

La evaluación de la densidad de fracturación es un cálculo que, para la importancia que tiene, habitualmente o se realiza con técnicas manuales poco robustas, o se deja a cargo del software inadecuado. Estos métodos no tienen en cuenta a qué nivel de escala la información disponible del medio fracturado es máxima. Si así fuera, se podrían evitar redundancias o sesgos artificiales originados bien en la restitución de los lineamientos, bien en la atribución de la misma sobre una zona, o en ambos.

Por ello, se proponen dos soluciones que, aún siendo computacionalmente más costosas que las manuales, reducen el grado de incertidumbre asociado a esta medida, parámetro característico del medio fracturado. En la primera, se asigna un valor constante al área de estudio, dependiendo de las características fractales del campo de fracturas. Y en la segunda, se entiende que la densidad es una variable espacial discretizada sobre el plano a cierta escala crítica. Esta escala, se calcula para recoger toda la información posible de la variable para distribuirla en el área.

Como aplicación de estas dos metodologías se presenta un estudio comparativo sobre los resultados obtenidos en un área del Sistema Central de la Península Ibérica (escala 1:500.000).

Palabras clave: densidad de fracturación, entropía, fractal, información, Sistema Central.

## ***Efficient evaluation of fracture density***

### ABSTRACT

*The estimation of fracture density is usually carried out despite its importance, using unreliable manual techniques, or using an inadequate software. These techniques do not take into account the scale level where the available digital information of the fractured medium is maximum. If this was so, redundant or artificial bias from lineaments restitution or in assigning this parameter over a whole area could be avoided.*

*Therefore, two solutions are presented here, although they require a higher computational effort. They both reduce the uncertainties in fracture density measure. One assigns a constant value to the studied area based on the fractal characteristics of the fracture field. In the other, fracture density is considered a spatial variable discretised at certain critical scale corresponding to the maximum information entropy scale.*

*A comparative study is performed over the Iberian Central System at 1:500.000 scale as an application of both methodologies.*

*Key words: entropy, fractal, fracture density, information, Iberian Central System.*

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, las herramientas de trabajo usuales en el estudio interpretativo de un medio geológico fracturado son tres: fotografía (aérea o de campo), imágenes de satélite y Modelos

Digitales del Terreno (MDT). Tanto las imágenes de satélite como la fotografía aérea están especialmente indicadas para el análisis macroestructural, y la de campo para el análisis local microestructural. Este análisis se utiliza posteriormente en la caracterización geométrica y cinemática de

los cuerpos geológicos interesados en la zona en estudio, así como de las estructuras que los afectan, a una escala mayor del afloramiento o escala cartográfica.

En el caso de fotografías aéreas, se habla de restitución fotogramétrica, que consiste en el paso de la foto al mapa, siendo necesarias ciertas correcciones, debidas fundamentalmente a distorsiones en la adquisición de las fotos.

En el empleo de imágenes de satélite, dentro de la teledetección, el aprovechamiento de esta herramienta va a depender esencialmente de la calidad de los afloramientos rocosos, del suelo, de la vegetación, etc. Estas mismas limitaciones son las que se tienen cuando se procede a realizar sobre el terreno la cartografía geológica, si bien la imagen de satélite ofrece una visión integrada de la morfología estructural de conjunto y la posibilidad de utilizar un amplio rango del espectro electromagnético.

Finalmente, los MDT usan exclusivamente datos topográficos. Tras un proceso de captura de datos y almacenamiento, son tratados mediante procesos de sombreado artificial y gradientes direccionales que resalten los lineamientos, excluyendo así posibles confusiones debidas a la interpretación de lineaciones no morfoestructurales como tales.

No obstante, y a pesar de que aún no está comúnmente extendido su uso, los Modelos Digitales del Terreno presentan ventajas muy importantes frente al resto, como son: prestar un soporte adecuado a toda la información cartográfica (estructural, petrológica, hidrológica) y, sobre todo, son fundamentales para el estudio de las relaciones entre las características de la red de fracturación a diferentes escalas. Esto es así debido a que la única información que se utiliza en la interpretación es la topografía, lo cual evita que se puedan interpretar lineaciones vegetales, antrópicas, etc., como lineaciones morfoestructurales.

Este hecho es muy importante, debido fundamentalmente a que no interesará perder información en el proceso de interpretación y restitución de los lineamientos, pero tampoco será conveniente añadir más información que la real. Como

se discutirá más adelante, la cantidad de información máxima que puede aportar un medio es la que es y vendrá indicada por su entropía.

En lo que sigue, se propondrá la utilización de los MDT como fuente de los lineamientos que se van a analizar en este artículo.

### **Restitución de los lineamientos**

La restitución de los lineamientos, es el proceso por el cual se pasa de la interpretación de las fotografías, imágenes y modelos a la definición geométrica de las posibles fracturas, fallas, diaclasas, diques, o discontinuidades que se encuentran en el terreno. Los criterios básicos de interpretación para llevarla a cabo son dos: la topografía y la red de drenaje. Dentro de la topografía están comprendidas la litología y las estructuras morfotectónicas. Además, en la restitución se tienen en cuenta varios criterios para el reconocimiento de la fracturación: discontinuidad de las estructuras y en la alineación de colinas, cerros, etc.; desplazamientos de los estratos, de diques y de fracturas a ambos lados de la falla; incluso cambios bruscos en la vegetación, en la red de drenaje, en el tono, ... entre otros.

En cualquier caso, sea cual sea la procedencia de los lineamientos a restituir, la escala a la cual se cartografíen será determinante. En primer lugar, la cantidad de información que se recoja estará muy condicionada por el límite de percepción visual humano, que para magnitudes lineales es de 0,25 mm. Esto significa que, si se multiplica la escala por el límite de percepción, se obtendrá un umbral mínimo por debajo del cual no se registrarán medidas de magnitud inferior, con la consiguiente pérdida de información. Además, según la escala se podrán estar infravalorando lineamientos más grandes que la propia ventana de observación, impuesta por la escala cartográfica.

Ambos fenómenos se traducen en el siguiente hecho: sobre la función de distribución de las longitudes de los lineamientos, se estarán recorriendo las colas debidas a lineamientos en principio poco probables, con longitudes o mucho menores o mucho mayores que la media. Por otro lado, se habrá de considerar la pericia de la

persona que restituya los lineamientos, que, según su interpretación, puede considerarlos de varias formas: no será lo mismo un lineamiento muy largo que una sucesión de lineamientos más o menos concatenados. O bien puede truncarlos, o considerar que atraviesan a otros lineamientos, etcétera.

### LA DENSIDAD DE FRACTURACIÓN

En principio, ¿qué se entiende por densidad de fracturación?. En la bibliografía pueden encontrarse diferentes aproximaciones a esta respuesta. En algunas se encuentra el término intensidad (Dershowitz *et al.*, 1998), en otras persistencia (Dershowitz y Herda, 1992), y en otras se denomina densidad a una relación que no tiene nada que ver con los anteriores (Charlaix y Roux, 1987, Rockworks, 1999), produciendo la correspondiente confusión terminológica.

Según la definición física, la densidad es la cantidad de magnitud física, sea masa, energía, etc. que contiene la unidad de espacio (en términos infinitesimales  $\rho=dm/dV$ ). Cuando se trata de campos de fracturas, o de cuerpos geométricos en el espacio, la magnitud física que se asocia es proporcional a su diámetro, es decir, a su extensión (longitud en el caso de trazas bidimensionales, o superficies en tres dimensiones). La definición se traduce entonces, para el plano en dos dimensiones, en la longitud  $\bar{l}$  total por unidad de área,  $\lambda_{21}$ :

$$\lambda_{21} = \frac{\sum l_i}{A} \quad (1)$$

ó en tres dimensiones, como superficie fracturada  $s$  por unidad de volumen de roca,  $\lambda_{32}$ :

$$\lambda_{32} = \frac{\sum s_i}{V} \quad (2)$$

ambas con dimensiones de  $[L^{-1}]$ . Los sumatorios se extienden sobre todas las  $i$  fracturas consideradas en el área o en el volumen, respectivamente.

En ocasiones, la densidad se confunde con la

intensidad de fracturación. El concepto de intensidad esta asociado a la cuantificación de un flujo de cierta cantidad que, en este caso, corresponde con el número de fracturas. Así las cosas, dado que el flujo es una magnitud por unidad de superficie, la intensidad de fracturación se refiere al número de fracturas por unidad de área o de volumen:

$$I_{21} = \frac{\sum 1_A(i)}{A} \quad ; \quad I_{32} = \frac{\sum 1_V(i)}{V} \quad (3)$$

con dimensiones de  $[L^{-2}]$  y  $[L^{-3}]$ , respectivamente. La función indicadora,  $1_A(i)$  ó  $1_V(i)$ , es la unidad si la  $i$ -ésima fractura se encuentra en el área o en el volumen en estudio, y son cero en otro caso.

La persistencia de fracturación (Dershowitz y Herda, 1992), aunque como denominación está menos extendida, se aplica para definir el mismo concepto que la intensidad o que la densidad de fracturación. La densidad y la intensidad de fracturación se encuentran relacionadas, a través de una proporcionalidad directa, exceptuando el caso particular en el que los datos estén tomados sobre una dirección o transecto (cuando se trata de puntos espaciados sobre una recta), para el que ambas coinciden:

$$\lambda_{10} = I_{10} = \frac{\sum 1_L(i)}{L} \quad (4)$$

con dimensiones de  $[L^{-1}]$ . En los otros dos casos (bi y tridimensional), la constante de proporcionalidad es el momento de primer orden de la función de distribución de tamaños de fracturas. Así, en el caso bidimensional, al tratarse de segmentos rectilíneos, ésta corresponde con la longitud promedio de la función de densidad de probabilidad de longitudes  $f(l)$ :

$$\lambda_{21} = I_{21} \int_0^{\infty} f(l) dl = I_{21} \bar{l} \quad (5)$$

La estimación de la función de distribución  $f(l)$  debe hacerse con cierta cautela, para evitar los efectos que puede producir el hecho de que haya fracturas truncadas por su restitución o por su posición. Para evitarlo, es recomendable un estu-

dio más detallado (Visser y Chessa, 2000) de la información que proporcionan esas fracturas, cuyo tamaño está sesgado, que modifique las colas de la función  $f(\lambda)$ . Para más detalles también pueden consultarse Priest y Hudson (1981), Pahl (1981) y Laslett (1982). En el caso volumétrico, la función de distribución corresponde con la de superficie de fractura  $f(s)$ . Por lo tanto, la constante de proporcionalidad entre densidad e intensidad es la superficie promedio:

$$\lambda_{32} = I_{32} \int_0^{\infty} sf(s)ds = I_{32}\bar{s} \quad (6)$$

En la práctica, la utilidad de las relaciones anteriormente presentadas es muy limitada. El problema de interés se plantea en la cuantificación de la relación entre las magnitudes, cuando éstas se refieren a diferentes dimensiones, especialmente en la densidad, que es en la que interviene la extensión de las fracturas. Para encontrarlas es preciso acudir a aquellas que proporciona la estereología, y que se hallan en textos de geometría estocástica, como por ejemplo en Stoyan, Kendall y Mecke (1987) y en Santalo (1976), o de teoría estereológica en Underwood (1970). El tipo de relaciones que se establecen son del estilo:

$$\lambda_{32} \alpha C'' \lambda_{21} \alpha C' \lambda_{10} \quad (7)$$

donde, las constantes de proporcionalidad  $C'$  y  $C''$ , que establecen la igualdad, tienen una dependencia no lineal con las distribuciones de tamaños de fracturas y de orientaciones, que son desconocidas. En realidad, estas funciones de distribución deben ser estimadas a partir de los datos disponibles de campo, de tal manera que, en primer lugar, se calibra una función esférica para las orientaciones (direcciones y buzamientos) de las fracturas. Esta se usa, a posteriori, para evaluar una función de distribución test para los radios de fracturas (supuestas como discos tridimensionales en el espacio), teniendo en cuenta que, con ambas, debe verificarse la distribución de tamaños de trazas cartografiadas sobre el terreno (HIDROBAP, 2000).

Hasta ahora se han expuesto dos medidas cuyo soporte es el campo de fracturas, expresadas

como puntos, trazas o superficies alabeadas, según sea la dimensión de muestreo (uni, bi o tridimensional, respectivamente). Sobre este soporte espacial, es también posible definir otras medidas, que se denotarán de manera general como  $\mu$ . Algunas de ellas tienen un significado físico relacionado con las anteriores.

Si se considera que la información procede de lineamientos (de igual manera se plantearán si el origen geométrico es diferente), desde un punto de vista probabilístico, puede definirse la probabilidad de fracturación de un área  $A$ , como la probabilidad de encontrar alguna fractura en  $A$ , dentro de una región mayor  $B$ , según:

$$\mu_{A \subset B} = \frac{\sum_{i \in A} 1_A(i)}{\sum_{j \in B} 1_B(j)} \quad (8)$$

Obviamente, si  $A = B$ , esta medida es la unidad. Si la fracturación es uniforme en  $B$ , entonces  $\mu_{A \subset B} \propto s_A/s_B$ . La razón de longitud de fracturación en un área  $A \subset B$ , se calcula según:

$$\mu_{A \subset B} = \frac{\sum_{i \in A} \downarrow}{\sum_{j \in B} \downarrow} \quad (9)$$

entendido como el tanto por uno de longitud de fracturación en  $A$  respecto a  $B$ . Ambas medidas están implícitamente normalizadas. Es decir, si a partir de un conjunto  $\{A_k\}$  de áreas disjuntas,  $A_m \cap A_n = \emptyset$ , tales que todas ellas consiguen recubrir  $B = \cup_k A_k$ , entonces (9) verifica:

$$\begin{aligned} \mu_{A \subset B}^1 &\in [0,1] \\ \sum_k \mu_{A_k \subset B}^1 &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Para los cálculos que se presentan a continuación se ha adoptado como medida que caracteriza el medio fracturado la densidad de fracturación, por las aplicaciones que puede tener a posteriori hacia la modelización y simulación del campo de fracturas en tres dimensiones.

## EVALUACIÓN REGIONAL CONSTANTE

La evaluación regional de la densidad de fracturas en un medio geológico se realiza cuando se

intenta cuantificar el grado de fracturación sobre un área en toda su extensión. La caracterización cuantitativa a este nivel de escala es muy simple y se realiza normalmente a través de la relación (1), (2) ó (4), dependiendo de la dimensión de procedencia de los datos.

Esta estimación, aunque válida para una primera aproximación, puede ser deficiente si no reúne una serie de requisitos. Entre éstos cabe mencionar el hecho de que para un tamaño concreto del área, las posibilidades de identificación de los lineamientos y su ulterior restitución, decrece con el tamaño de los mismos. De igual forma, aquellos lineamientos que se encuentran truncados en su longitud por el limitado tamaño de la ventana de observación, o área de estudio, introducen un sesgo en la aproximación de la densidad. Finalmente, hay que mencionar el hecho de que las trazas se encuentren quebradas por tramos; o, por el contrario, se aumentaría si éstas se considerasen líneas tortuosas (cuando se evalúa  $\lambda_{21}$ , por ejemplo).

Entonces, ¿cómo aprovechar la información disponible para cada una de las escalas de fracturación, de tal forma que en su conjunto sea representativa de toda el área?, ¿cuál es esta información?, y ¿cómo cuantificarla?. La respuesta la proporciona la teoría geométrica de la medida, o más comúnmente conocida como geometría fractal. Si se estudia el comportamiento invariante al cambio de escala del medio fracturado, es decir se evalúa a qué dimensión el campo de fracturas puede medirse, y se utiliza esta medida para estimar la densidad de fracturación, el resultado proporcionado asegura que la densidad tiene en cuenta la información del medio a todas las escalas comprendidas entre aquellas que verifican el comportamiento fractal del campo de fracturas.

La medida que se utiliza, para cuantificar el tamaño del campo de fracturas, es la medida de Hausdorff (Falconer, 1990), que se define, para un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  (que pudiera ser el campo de fracturas), como el límite:

$$\mu^{t,H} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon}^t(F) \quad (11)$$

si este límite existe para un  $t$  particular; y siendo:

$$H_{\delta}^t(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^t; \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\} \quad (12)$$

para un  $\delta$ -recubrimiento contable (o finito) de conjuntos  $\{U_i\}$ , cuyo diámetro es  $|U_i| \leq \delta$ , del conjunto  $F$ . El valor de  $t$ , para el cual este límite existe y es finito, se denomina dimensión de Hausdorff, más conocida como dimensión fractal  $D$ , de  $F$ . Esta es la dimensión para la cual el conjunto  $F$  es mensurable. Ahora bien, ¿cómo medir computacionalmente  $F$ ? Uno de los métodos comúnmente propuestos se denomina conteo de celdas o *box-counting* (Paredes y Elorza, 1999), que consiste en calcular el límite (11), utilizando un recubrimiento de conjuntos  $U_i$ , formado por celdas de tamaño  $\varepsilon$  (de lado o de diagonal) decreciente (para que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Transformando la expresión (11), para este tipo de recubrimiento, la medida  $D$  dimensional de Hausdorff de  $F$  se aproxima por:

$$\mu^{D,H} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon}^D(F) \cong \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (N(\varepsilon)\varepsilon^D) \quad (13)$$

tomando logaritmos en ambos lados de la igualdad:

$$\log \mu^{D,H} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\log N(\varepsilon) + D \log \varepsilon] \quad (14)$$

y evaluando que su comportamiento es invariante al cambio de escala a partir de la calidad de la regresión lineal de  $\log N(\varepsilon)$  vs.  $\log \varepsilon$ , puede aproximarse:

$$D \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (15)$$

En el ajuste resultante, la ordenada en el origen, para  $\varepsilon = 1$ , permite determinar la medida  $D$  dimensional de Hausdorff de  $F$  como:

$$\mu^{D,H} = N(1) \quad (16)$$

A partir de (16), se define la densidad fractal de fracturación como:

$$\lambda_{10}^{D,H} = \frac{\mu^{D,H}}{L}; \quad \lambda_{21}^{D,H} = \frac{\mu^{D,H}}{A}; \quad \lambda_{32}^{D,H} = \frac{\mu^{D,H}}{V} \quad (17)$$

para datos procedentes de muestreo uni, bi y tri-dimensional respectivamente.

La comparación de las medidas obtenidas regionalmente, a partir de las ecuaciones (1), (2) ó (4), con (17), respectivamente, proporciona información sobre la calidad de los datos analizados, en cuanto a la integridad de la restitución a una escala particular. Tomando este criterio, cuando  $\lambda < \lambda^{D,H}$  significa que la calidad de la restitución es pobre, lo que conlleva a que falten fracturas que pudieran encontrarse a la escala de muestreo, y que por lo tanto ésta esté incompleta. Por el contrario, si  $\lambda > \lambda^{D,H}$ , entonces se han cartografiado más fracturas de las que un modelo de tipo fractal puede admitir o bien que el nivel de detalle recogido en la cartografía sea excesivo para la escala de trabajo.

#### EVALUACIÓN LOCAL VARIABLE

En otras situaciones, habitualmente relacionadas con la modelización del medio fracturado para su posterior simulación estocástica, o por el simple hecho de realizar un estudio sobre la variabilidad espacial de la densidad de fracturación, es necesario que ésta se determine como una función estocástica de la posición  $\lambda(\mathbf{x})$ . Como en la práctica resulta imposible definir su valor para las infinitas posiciones  $\mathbf{x}$  del espacio, ya sea porque los datos no se detectan a todas las escalas o porque su cálculo sobre todos los puntos es computacionalmente inalcanzable, debe procederse a la discretización espacial de esta función. De esta manera, los puntos discretos  $\mathbf{x}_i$  sobre los que se realiza el cálculo se encuentran agrupados en elementos o celdas cuadradas de lado  $\varepsilon$ , con un valor asociado  $\lambda(\mathbf{x}_i) = \lambda_i$ , promedio del que poseen los puntos recogidos en su interior. La asignación del correspondiente valor de la densidad de fracturación sobre cada celda se calcula a partir de (1), para un área  $A$  de  $\varepsilon^2$  unidades, (2) ó (4) para un volumen o longitud de  $\varepsilon^3$  o  $\varepsilon$ , respectivamente.

La necesidad de aplicar una discretización, supone que debe conocerse a qué escala  $\varepsilon$  se discretiza el espacio, lo cual no suele ser simple a priori. Si la escala adoptada es demasiado pequeña, aparecen notables diferencias entre celdas contiguas con los consiguientes huecos en la distribución espacial de  $\lambda_i$ , pérdida de regularidad

y de precisión. La evaluación a una escala muy pequeña necesita una buena calidad de restitución en los lineamientos, lo que es muy complejo, especialmente si no se dispone de una metodología y un sistema que lo automatice (Koike, Nagano y Kawaba, 1998), y si el área de estudio es muy amplia. Por el contrario, si la escala es demasiado grande, la información se promedia sobre grandes zonas, haciendo difícil el estudio de la irregularidad, al perderse mucha información del detalle recogido durante el muestreo.

El encontrar la escala apropiada de discretización, implica adoptar una solución de compromiso para el tamaño de las celdas, de tal forma que, siendo un tamaño grande no promedie excesivamente, manteniendo el grado de irregularidad espacial; y siendo un tamaño pequeño, que no exija una calidad de muestreo, un coste computacional difícilmente alcanzable con los recursos disponibles y una irregularidad impropia de la densidad.

En la práctica, la estimación de esta escala suele hacerse manualmente, ponderando los pros y los contras de tomar una escala mayor o menor, comparándose el error cometido en los análisis de variabilidad, para una serie de escalas entre las cuales se encuentra la considerada como óptima. Existe una relación empírica entre ésta y un percentil de la función de distribución de distancias entre lineamientos (Casas *et al.*, 2000), considerada como la distancia entre los centros de las fracturas. Como puede entenderse, esta forma de proceder resulta poco robusta y laboriosa, notablemente por su empirismo.

La metodología alternativa que aquí se propone, y que permite superar los inconvenientes de la aproximación manual de la escala, se basa en la búsqueda semi-automática de ésta para la que se encuentra el máximo de la entropía asociada a la distribución de densidad de fracturación. Si se conoce esta distribución de forma continua, designada por  $f(z)$  (función de densidad de probabilidad de la configuraciones  $z$  del sistema), la entropía de información del sistema es:

$$H = - \int z \log f(z) dz \quad (18)$$

Cuando la distribución de configuraciones es discreta, como el número de configuraciones posibles es finito, la integral se transforma en un sumatorio:

$$H = -\sum_{i=1}^{nc} p_i \log p_i \quad (19)$$

para un sistema con  $nc$  configuraciones, de probabilidad  $p_i$ , no nula, cada una.

Si se considera que el número de configuraciones posibles depende de la escala  $\varepsilon$  en la que se muestrean, entonces la distribución de probabilidad cambiará para cada escala. De esta forma, la entropía se hace también dependiente de la escala:

$$H(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{nc} p_i(\varepsilon) \log p_i(\varepsilon) \quad (20)$$

Por ejemplo, supóngase una configuración en la que las medidas sean equivalentes (eventos equiprobables), entonces la entropía es la máxima que puede alcanzarse:  $H_{\max}(\varepsilon)$ , dependiendo ésta del tipo de sistema que se trate y de la medida de probabilidad aplicada. Se define la entropía de configuración o relativa (Shanon, 1948) como el tanto por uno que posee la entropía de un sistema frente a la máxima que puede tener:

$$H^*(\varepsilon) = H(\varepsilon) / H_{\max}(\varepsilon) \quad (21)$$

La función  $H^*(\varepsilon)$  posee un máximo en una escala  $\varepsilon^*$ , denominada escala de entropía óptima. Dicha escala es aquella para la cual los datos proporcionan la mayor cantidad de información y, por lo tanto, a la que deben ser analizados. De esta manera la búsqueda de esta escala se traduce en encontrar ésta para la que el sistema se aproxime más a uno con distribución uniforme.

Cuando el sistema se encuentra formado por un conjunto geométrico de elementos (fracturas), las probabilidades de las configuraciones del sistema que corresponden con la medida (9), para un caso bidimensional, donde  $A$  es la  $i$ -ésima

celda de discretización y  $B$  el área donde están recogidas las fracturas. Es decir, si

$$\mu_i^p = \mu_{A_i \subset B}^1 :$$

$$H^p(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{nc} \mu_i^p(\varepsilon) \log \mu_i^p(\varepsilon) \quad (22)$$

para todas las  $i$  celdas, de tamaño  $\varepsilon$ , resultantes de discretizar  $B$ . El sumatorio se efectúa sobre las  $nc$  celdas que contienen medida no nula,  $\mu_i^p \neq 0$  (por convenio, las celdas de medida nula proporcionan una entropía nula). Establecida la entropía que se calcula para cada escala, por hacer comparables los resultados entre diferentes áreas, se determina la entropía de configuración o relativa para la medida adoptada:

$$H^{p*}(\varepsilon) = H^p(\varepsilon) / H_{\max}^p(\varepsilon) \quad (23)$$

siendo, para la medida adoptada:

$$H_{\max}^p(\varepsilon) = \log nc \quad (24)$$

Para calcular la escala de máxima información  $\varepsilon^*$ , se hace un estudio del comportamiento cóncavo que tiene la entropía de configuración (23) en un intervalo de escalas  $\varepsilon^* \in [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \subset [0, +\infty]$ . En la práctica, la cota superior de este intervalo corresponde con la longitud del menor lado que limita el área de estudio, para la que:

$$H^{p*}(\varepsilon) = 0$$

La cota inferior puede tomarse, como se comentó anteriormente, en relación con el tamaño de la mínima fractura, o de la mínima distancia entre éstas. Una vez la entropía relativa alcance el máximo, la escala correspondiente se asigna a  $\varepsilon^*$ :

$$H^{p*}(\varepsilon) \Big|_{\max} = H^{p*}(\varepsilon^*) \quad (25)$$

En este estudio, el comportamiento de  $H^{p*}(\varepsilon)$  muestra una fuerte dependencia con el número de datos, esto es, con el número de elementos en los que se discretiza el área de estudio (Goltz, 1997), mientras que  $\varepsilon^*$  es mucho más robusta, influenciada por los posibles efectos de lacunaridad en la medida. Gracias a la precisión con la

que esta escala puede obtenerse, incluso pequeñas diferencias en los máximos pueden considerarse como muy significativas en las características de los datos de partida, aunque éstos sean muy parecidos.

Como, en principio, se ha sugerido que la caracterización del medio fracturado es más apropiada con la densidad de fracturación que con otras medidas, entonces ¿por qué se calcula la entropía mediante la medida (9) en (22), en vez de usar  $\lambda_i$ ? Así las cosas, si se designa a la entropía resultante de utilizar la densidad de fracturación como:

$$H^\lambda(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{nc} \lambda_i(\varepsilon) \log \lambda_i(\varepsilon) \quad (26)$$

Al tomar esta medida, el valor máximo alcanzable por la entropía, para cada escala, es:

$$H_{max}^\lambda(\varepsilon) = -\lambda_\varepsilon \log \lambda_{21} \quad (27)$$

con la que se calculará la correspondiente entropía de configuración para la densidad de fracturación:

$$H^{\lambda*}(\varepsilon) = H^\lambda(\varepsilon) / H_{max}^\lambda(\varepsilon) \quad (28)$$

para estimar la correspondiente escala de máxima información  $\varepsilon^*$ .

Esta entropía está directamente relacionada con  $H^{\rho*}(\varepsilon)$  a través de un coeficiente que la multiplica y una constante adicional, donde aparece

$$\lambda_\varepsilon = \sum_i \lambda_i / \varepsilon^2$$

o densidad específica, que depende de la escala  $\varepsilon$ . Con lo que el cálculo de la posición del máximo con  $H^{\rho}(\varepsilon)$  o con  $H^{\lambda}(\varepsilon)$  es equivalente.

Calculada la escala óptima a la cual se discretiza el espacio, se determina para cada celda  $i$  el valor que le corresponde de densidad de fracturación, verificándose la relación:

$$\lambda_{n-1} = \frac{\varepsilon^{*n} \sum_i \lambda_i}{L^n} \quad (29)$$

entre las densidades regional constante y local variable, para un estudio  $n$  dimensional, sobre un dominio de lado  $L$ .

## ESQUEMAS COMPUTACIONALES

Tómese el caso de un MDT sobre el que se han identificado y restituido una serie de lineamientos. La obtención de la densidad de fracturación regional constante es un cálculo en principio sencillo, ya que basta, aplicar (1). En el mercado existen programas comerciales que permiten hacer este cálculo, como por ejemplo FRACMAN (Dershowitz *et al.*, 1998), pero no son capaces de obtener (17). Para ello es necesario un programa de análisis fractal sobre lineamientos que permita calcular (15), como por ejemplo en Paredes y Elorza (1999), sobre un campo de fracturas.

Igualmente, el cálculo de la densidad de fracturación local variable puede hacerse mediante algún programa. Pero dado que se trata de un estudio de más detalle que el simple regional, muy pocos lo incluyen, y sólo aquellos específicos que traten con datos geológicos. Este es el caso de ROCKWARE (Rockworks, 1999), en el que se permite la evaluación de (3), (8) y de una medida semejante a la densidad de fracturación. La dificultad se encuentra en la utilización de un esquema de cálculo eficiente, en el sentido de tiempo para calcular la longitud de la intersección entre un segmento y una celda rectangular. En la literatura pueden encontrarse algunos algoritmos que permiten resolver este problema. Por ejemplo, en Rogers (1985) se presenta, aunque de forma incompleta, el esquema de Sutherland y Cohen, basado en una codificación binaria de la posición relativa del segmento frente a la celda. Otra estrategia posible, aunque menos rápida, es la que se usa en Casas *et al.* (2000), en la que se calcula la longitud estableciendo todas las posibles posiciones relativas y evaluando condicionalmente, con las coordenadas de los extremos del segmento, en cuál de éstas se encuentra.

## EJEMPLO: SISTEMA CENTRAL ESPAÑOL

Las metodologías alternativas presentadas para evaluar la densidad de fracturación regional y local, con la máxima información respectiva, han

sido aplicadas a un campo de fracturas cartografiado a escala 1:500.000 (figura 1), procedente de un MDT con una escala de pixel de 500 m.

La zona sujeto de estudio, que incluye gran parte del Macizo Central español, está comprendida entre las coordenadas UTM X:299867-450643.8 e Y:4409506-4490081. Tras la correspondiente restitución, se han marcado un total de 1483 lineamientos de diversas longitudes. Sobre los datos analizados se han incorporado aquellos que se encuentran truncados en su longitud por situarse próximos a los bordes del área considerada.

La función de distribución de tamaños  $f(\lambda)$  se aprecia en la figura 2 (sin corregir los efectos de truncamiento). Sobre ésta puede constatar que hay una moda muy marcada en las longitudes próximas a los 3000 - 4000 m, valor máximo de las longitudes para casi un 70% de la población. Si se tiene en cuenta el límite de percepción a

esta escala, que se señaló al principio de este trabajo, será muy difícil encontrar lineamientos de longitud inferior a 125 m. La frecuencia de la clase que incluye este valor sobre la función de distribución aproximada presenta un valor nulo (véase la ampliación entre 0 - 1000 m del recuadro). De hecho, el lineamiento de menor tamaño encontrado es de unos 450 m. A este respecto, según contempla la Tabla 1, en la columna de percentiles, un 1% de las fracturas posee una longitud inferior a los 780 m, el 50% de las mismas son como máximo de 3438 m, y el 99% inferiores a los 15800 m.

Al analizar los datos para obtener la densidad de fracturación regional, basta con determinar la longitud total de los mismos y dividir ésta por la superficie que abarca el área de estudio ( $12148840.66 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ ). Aplicando (1), resulta que  $\lambda_{21} = 5.2893 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , y una intensidad de valor  $I_{21} = 1.2206 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-2}$ , según (3), que corresponde

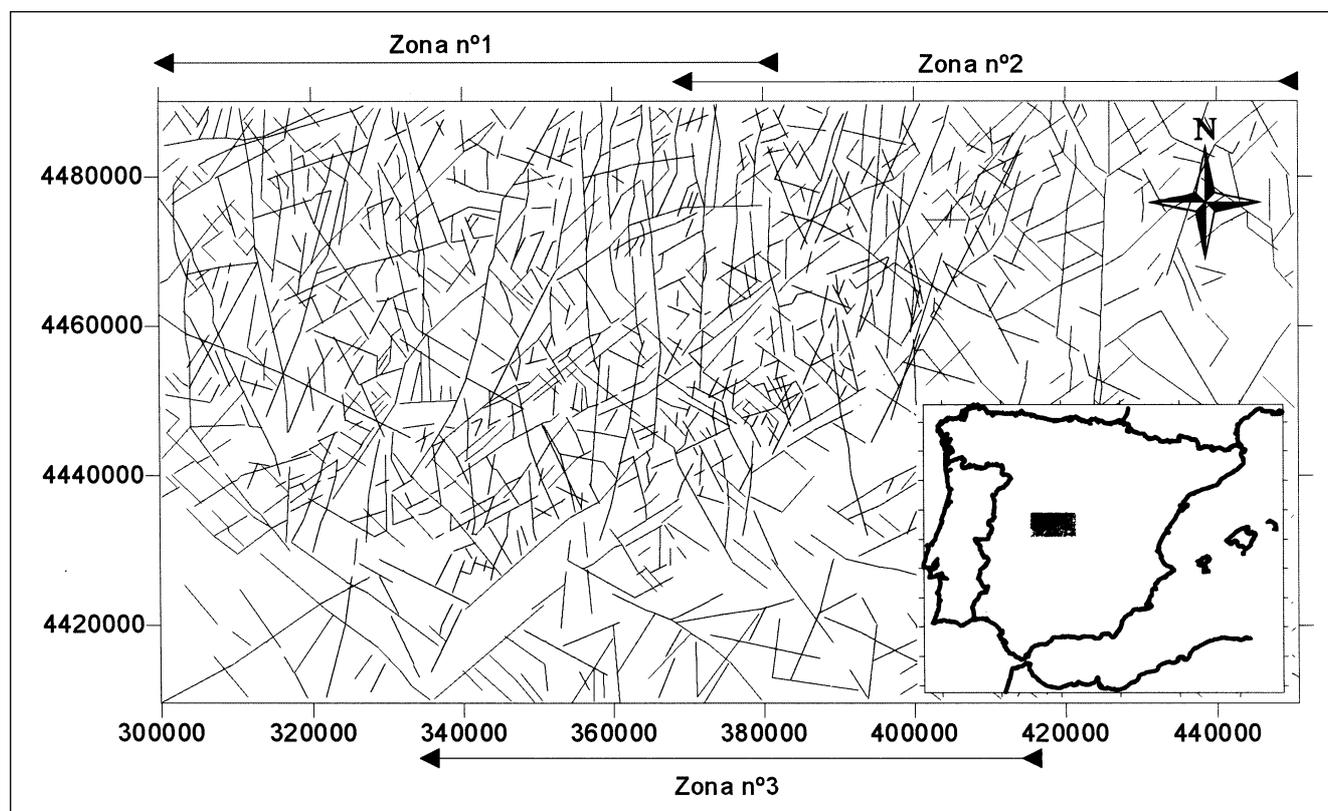


Figura 1: Lineamientos restituidos a partir del MDT a escala 1:500.000

Figure1: MDT restituted lineaments at 1:500.000 scale

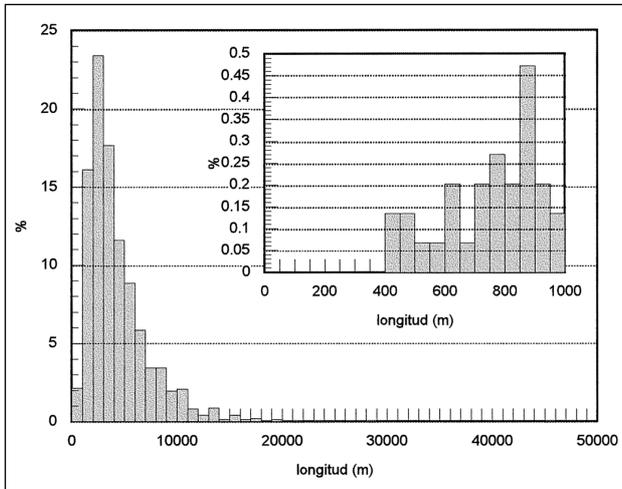


Figura 2: Función de densidad de distribución de las longitudes de los lineamientos restituidos. En el recuadro la distribución de tamaños entre 0 m y 1000 m.

Figure 2: Density distribution function of the restituted lineaments lengths. In the insert, size distribution between 0 and 1000 m

con el que se obtiene según la relación (5), si se tiene en cuenta que  $\bar{L}=4333.08$  m.

Siguiendo la metodología propuesta para mejorar la estimación de  $\lambda_{2,1}$ , se ha realizado un análisis

fractal del campo de lineamientos. Para ello el área inicial ha sido dividida en tres zonas cuadradas para apreciar, si existen, variaciones en el comportamiento al cambio de escala. Las mencionadas zonas han sido designadas por n° 1, n° 2 y n° 3, con una dimensión de 80575 m de lado (ver figura 1), para las que se han obtenido los resultados representados por puntos en la gráfica de la figura 3. El análisis detallado de las tres curvas (por puntos para cada zona), permite destacar tres intervalos de escalas con comportamientos diferentes. El primero, comprendido entre  $\epsilon_{min}$  y los 2177 m, en el que la regresión presenta una pendiente unidad, lo que permite asegurar que se está analizando, mediante el algoritmo de recubrimiento, fracturas de forma individualizada (como segmentos) de ahí que se recoja la dimensión de recubrimiento como la dimensión topológica de los cuerpos geométricos lineales. El segundo tramo está entre los 2177 m y los 4739 m y comprende la zona sobre la que puede determinarse (15); donde estimar (16) es factible, a partir de una regresión lineal de los datos en dicho intervalo. Se presentan en la Tabla 2 los resultados obtenidos para cada zona, en los parámetros más importantes de los ajustes. El tercer tramo de las gráficas se encuentra entre las escalas de 4739 m y  $\epsilon_{max}$  intervalo sobre el que todas las celdas del recubrimiento poseen al menos una fractura; en este intervalo el proceso de estimación de (16) recoge como dimensión la del espacio que contiene el campo de fracturas, es decir el plano bidimensional.

La comparación de los resultados para cada zona permite afirmar que, en cuanto a la dimensión de recubrimiento, se caracteriza la fracturación como un proceso persistente ( $D < 1.5$ ), reconociéndose zonas con pocas fracturas y otras con agrupaciones e incrementos localizados del número, si bien existe una fracturación de fondo generalizada que asegura que no se queden zonas amplias sin fracturar. En cuanto a la densidad de fracturación, comparativamente como  $\lambda_{2,1} < \lambda_{2,1}^{D,H}$  entonces puede afirmarse que si fuera posible una restitución del campo de fracturas hasta escala unidad, sobre la que se mide la densidad, se recuperarían dos ordenes de magnitud superior. Este hecho permite asegurar que el valor de densidad fractal es más conservador que el clásico. Esto es así, ya que, al incorporar más

Estadística univariante	Percentiles
N.º = 1483	1.0 % = 780.138 m
Media = 4333.08 m	5.0 % = 1246.81 m
Varianza = 1.03058E7 m <sup>2</sup>	10.0 % = 1589.21 m
Desviación = 3210.27 m	25.0 % = 2319.65 m
Mínimo = 438.196 m	50.0 % = 3438.26 m
Máximo = 45916.8 m	75.0 % = 5405.55 m
Sesgo Std. = 51.2232	90.0 % = 8246.3 m
Kurtosis Std. = 192.699	95.0 % = 10129.1 m
Suma = 6425963.7785 m	99.0 % = 15803.2 m

Tabla 1: Estadísticos significativos de las longitudes de los lineamientos restituidos en el área completa.

Table 1: Statistical data of the restituted lineaments lengths in the whole area

	Zona n.º 1 	Zona n.º 2 	Zona n.º 3 
$\lambda_{21}$	0.595459E-03 m <sup>-1</sup>	0.487432E-03 m <sup>-1</sup>	0.597446E-03 m <sup>-1</sup>
Dimensión D	1.4979 ± 0.025	1.4577 ± 0.025	1.3056 ± 0.030
$\lambda_{21}^{D,H}$	13.93032E-03 m <sup>-1</sup>	10.06705E-03 m <sup>-1</sup>	2.584075E-03 m <sup>-1</sup>
Coef. Correlación	-0.997301	-0.997127	-0.994973
R-sqr.	99.461 %	99.426 %	98.997 %

Tabla 2: Estadísticos más significativos del ajuste lineal bilogarítmico, por mínimos cuadrados, sobre los resultados del análisis fractal en cada zona

Table 2: Representative statistical data of the bilogarithmic lineal adjustment by square minimum on the results of fractal analysis on each zone

fracturas, que se rijan en su distribución espacial por un comportamiento invariante al cambio de escala, en el rango de escalas apropiado (de 1 m hasta los 5000 m aprox. dentro de las áreas tomadas), se incrementan las posibilidades de existencia de caminos críticos entre dos puntos (caso desfavorable, por ejemplo en problemas de contaminación medioambiental). Finalmente señalar que, frente al valor clásico de densidad regional, que parte de la información restituida como tal a cierta escala (según sea la del MDT), el valor de la densidad fractal de fracturación estima un valor

basado en un comportamiento percibido en un amplio rango de escalas, que se extrapola hacia escalas inferiores (de 1 m) suponiéndose que éste se mantiene hasta éstas. El hecho de que los campos de fracturas poseen un comportamiento fractal en un muy amplio abanico de escalas es una realidad constatada (p.e. Barton y La Pointe, 1995); con lo que el que esta extrapolación no pueda hacerse en base a los resultados gráficos de la figura 3, es debido a que sólo se dispone de información válida para recoger este comportamiento hasta los 2177 m por, probablemente, deficiencias en la calidad de la restitución para escalas inferiores a ésta.

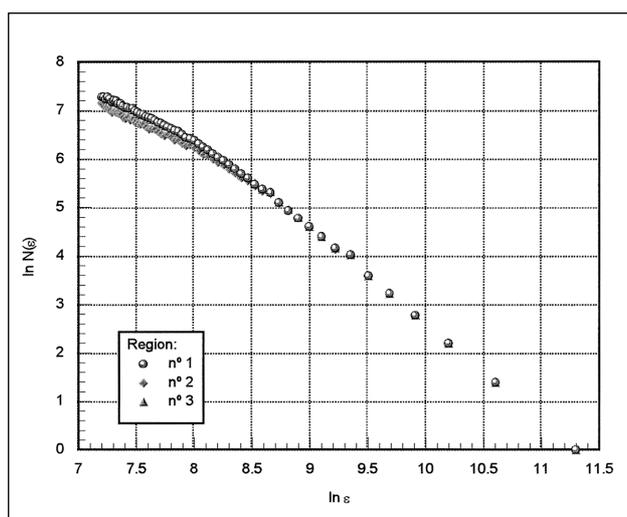


Figura 3: Puntos resultantes del análisis fractal por *box counting* en el intervalo de escalas  $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}] \equiv [1343,80575]$

Figure 3: Resulting points of fractal analysis by box counting in the scale range  $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}] \equiv [1343,80575]$

A continuación se estudia en detalle la distribución espacial de la densidad de fracturación a través de su estimación local como variable espacial determinada a la escala de máxima información de (21). A partir del comportamiento de la entropía de configuración de (22) según (23), y de (26) según (28), para las que se ha encontrado que el máximo se encuentra en una escala  $\epsilon^* \approx 11510$  m, en ambas debido a la equivalencia comentada del cálculo (figura 4). El valor de dicha escala se encuentra a su vez comprendido dentro del anterior intervalo de escalas de comportamiento invariante.

Una vez identificada esta escala, es posible describir el campo de fracturación mediante una medida asociada  $\lambda_{v_i}$ , discretizada en una serie de *i* celdas con un tamaño que asegura la mínima incertidumbre en su variabilidad espacial (figura 5).

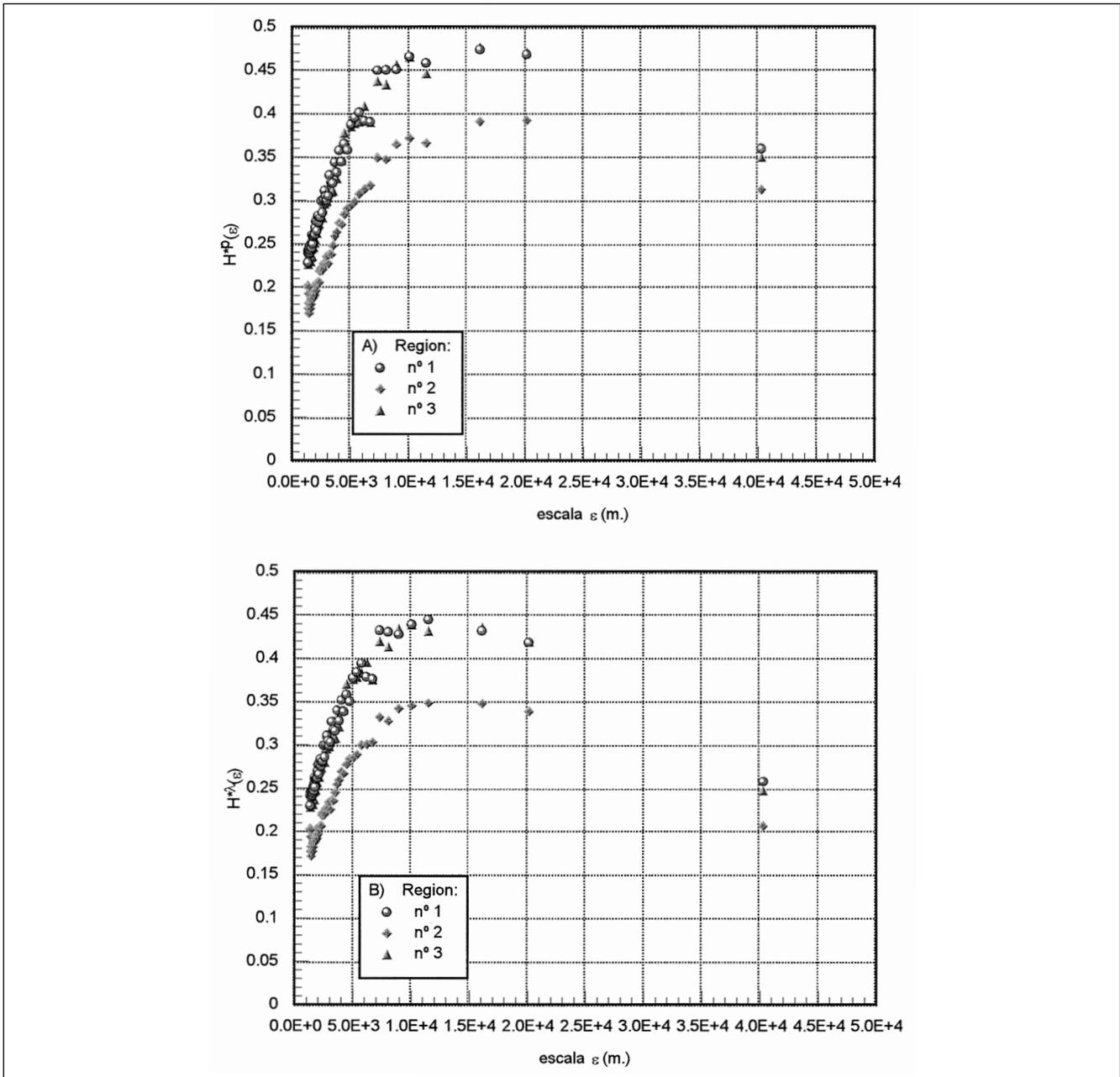


Figura 4. A) Gráfica de  $H^{p*}(\epsilon)$  según  $H^{p*}(\epsilon)=H^p(\epsilon)/H_{max}^p(\epsilon)$ . B) Gráfica de  $H^{h*}(\epsilon)$  según  $H^{h*}(\epsilon)=H^h(\epsilon)/H_{max}^h(\epsilon)$

Figure 4. A) Graphic of  $H^{p*}(\epsilon)$  according to  $H^{p*}(\epsilon)=H^p(\epsilon)/H_{max}^p(\epsilon)$ . B) Graphic of  $H^{h*}(\epsilon)$  according to  $H^{h*}(\epsilon)=H^h(\epsilon)/H_{max}^h(\epsilon)$

### CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

De entre las diferentes fuentes de información que pueden utilizarse para la restitución de lineamientos sobre el terreno, es la que corresponde a los Modelos Digitales del Terreno la que permite

cartografiar éstos con un menor error. El resto, como son las fotografías aéreas o de satélite, introducen elementos naturales y antrópicos que pueden producir errores en el análisis e interpretación de las trazas y lineamientos morfoestructurales.

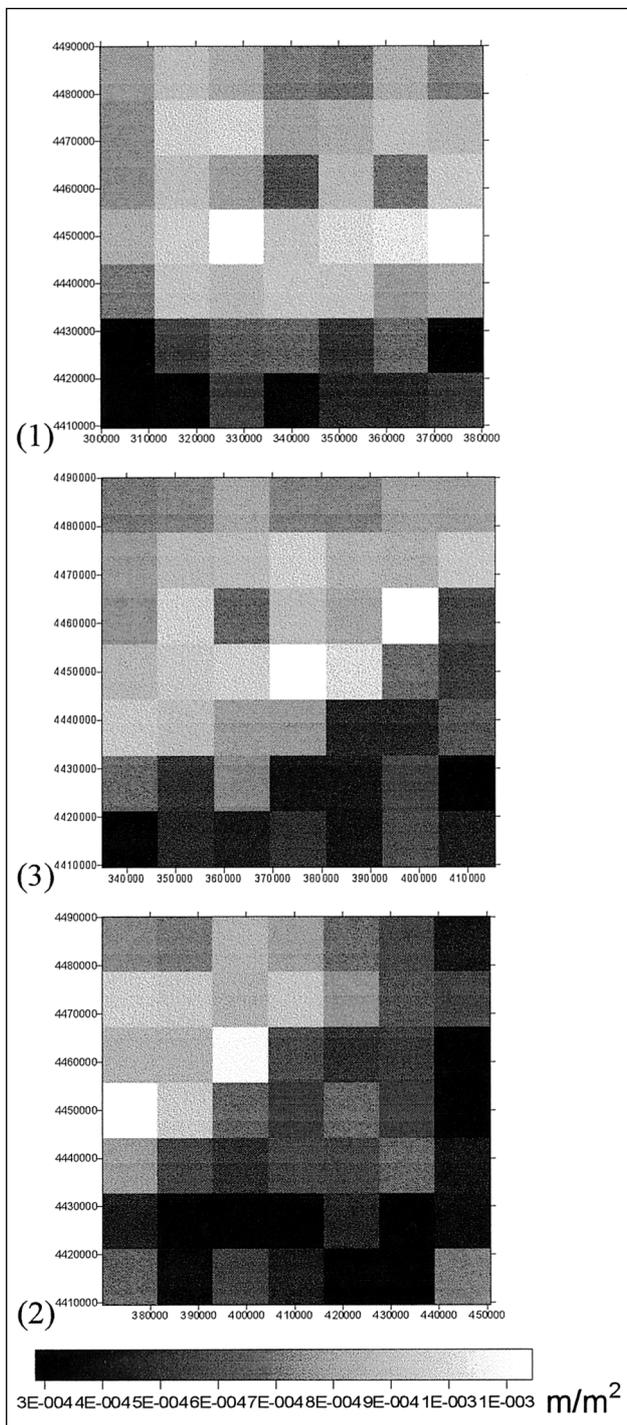


Figura 5. Campo de densidad de fracturación a escala de discretización  $\epsilon^*$ , para la distribución espacial de fracturas de la figura 1, en cada una de las tres zonas en las que se ha dividido (número entre paréntesis)

Figure 5. Fracture density field at  $\epsilon^*$ , discretisation scale, for the spatial distribution of fractures of figure 1, in each of the three subdivided zones (n.º between brackets)

La definición del término de densidad de fracturación alude a la extensión de las fracturas por unidad de espacio en estudio. Igualmente es posible definir la intensidad y la persistencia, que en el caso unidimensional coinciden con la densidad, y las ecuaciones que las relacionan entre sí.

El estudio tradicional de la densidad de fracturación regional como constante debe hacerse teniendo en cuenta toda la información disponible del medio fracturado a todas las escalas. Para ello, si el medio fracturado sigue un comportamiento fractal sobre cierto rango de escalas, es posible utilizar su medida de Hausdorff, y calcular la densidad fractal de fracturación.

La densidad local variable, como una distribución variable en el espacio, se calcula de manera finita sobre una discretización de la zona en estudio. La escala a la cual debe de efectuarse esta discretización debe tener en cuenta la variación de la información que, en forma de entropía, se encuentra para cada una de las discretizaciones. Se tomará de éstas la óptima, siendo aquella para la que la información disponible del medio fracturado es máxima. De esta manera se reducen los sesgos producidos por la deficiencia en la restitución de aquellos lineamientos pequeños y por el limitado tamaño de la muestra, al ser la ventana observacional finita.

La evaluación numérica de la densidad de fracturación, ya sea a escala regional o a escala local, requiere la preparación de una serie de programas informáticos que determinen la longitud de la intersección de un segmento con una celda rectangular. La elección del algoritmo que efectúe este cálculo será determinante en el tiempo que se invierta para ello, debido al gran número de operaciones que son necesarias.

La aplicación de las técnicas expuestas en este trabajo a los datos de los lineamientos cartografiados a partir del MDT 1:500.000 sobre el Sistema Central español, permiten afirmar que, su densidad de fracturación es del orden de  $0.5E-03 \text{ m}^{-1}$ , siendo la estimada según un criterio de comportamiento fractal dos órdenes de magnitud superior, lo que se traduce en un incremento cuadrático de las extensiones lineales de la fracturación del macizo. Desde el punto de

vista geológico esto significa que la escala de muestreo utilizada para la cartografía recoge un nivel de información insuficiente. Esta se supe y se extrapola hasta la escala de interés (1 m), gracias al comportamiento fractal del campo de fracturas. Para los datos de fracturación disponibles en el ejemplo analizado se obtiene una escala de máxima información del orden de 11500 m, lo que permite tratar la densidad de fracturación, como una variable espacial (variable regionalizada) muestreada sobre celdas de este tamaño, lo que permite utilizar las herramientas geoestadísticas para estudiar su estructura de correlación.

### AGRADECIMIENTOS

Al equipo del Departamento de Geodinámica, de la Fac. de CC. Geológicas (UCM), que realizó la restitución de los lineamientos del MDT a escala 1:500.000, por la cesión de los mismos para ser utilizados en parte de los estudios que aquí se presentan. A D. Ignacio Vélez por la preparación de los programas utilizados para evaluar la densidad de fracturación local.

### REFERENCIAS

- Barton, C. C.; La Pointe, P. R. 1995. *Fractals in the earth sciences*. Plenum Publishing Corporation. New York. 265 pp.
- Casas, A. M.; Cortes, A. L.; Maestro, A.; Soriano, M. A.; Riaguas, A.; Bernal, J. 2000. LINDENS: a program for lineament length and density analysis. *Computer & Geosciences*. 26. 1011-1022.
- Charlaix, E.; Roux, S. 1987. Permeability of random array of fractures of widely varying apertures. *Transport in porous media*. 2. 31-43.
- Dershowitz, W. S.; Herda, H. H. 1992. Interpretation of fracture spacing and intensity. En: Tillerson & Wawersik Eds. *Rock Mechanics*. Balkema, Rotterdam. 757-766.
- Dersowitz, W. S.; Lee, G.; Geier, J.; Foxford, T.; La Pointe, P.; Thomas, A. 1998. *FRACMAN. Interactive fracture data analysis, geometric modeling, and exploration simulation. User documentation, version 2.6*. Golder Associates Inc. Washington.
- Falconer, K. J. 1990. *Fractal geometry, mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Ltd. Chichester. 288 pp.
- Goltz, C. 1997. *Fractal and chaotic properties of earthquakes*. Springer-Verlag. Berlin. 178 pp.
- HIDROBAP, P. Hidrogeología de medios de baja permeabilidad. Colección Otros Documentos 20.2000.ODE-04.12. Consejo de Seguridad Nuclear - ENRESA. 2000. Madrid. 238 pp.
- Koike, K.; Nagano, S.; Kawaba, K. 1998. Construction and analysis of interpreted fracture planes through combination of satellite image derived lineaments and digital elevation model data. *Computers & Geosciences*. 24 (6). 573-583.
- Laslett, G. M. 1982. Censoring and edge effects in areal and line transect sampling of rock joint traces. *Mathematical Geology*. 14 (2). 125-140.
- Pahl, P. J. 1981. Estimate the mean length of discontinuity traces. *International Journal of Rock Mechanics, Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 18. 221-228.
- Paredes, C.; Elorza, F. J. 1998. Análisis y simulación fractal de medios fracturados. *Boletín Geológico y Minero*. 109-1. 21-34.
- Paredes, C.; Elorza, F. J. 1999. Fractal and multifractal analysis of fractured geological media: surface subsurface correlation. *Computers & Geosciences*. 25. 1081-1096.
- Priest, S. D.; Hudson, J. A. 1981. Estimation of discontinuity spacing and trace length using scanline surveys. *International Journal of Rock Mechanics, Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 18. 183-197.
- Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 1996. *Vocabulario científico y técnico*. Espasa Calpe SA. Madrid. 1627 pp.
- Rockworks. 1999. *ROCKWARE. Instruction manual*. Rockware Inc. Colorado.
- Rogers, D. F. 1985. *Procedural elements for computer graphics*. Computer Science Series. Mc Graw Hill, Inc. 433 pp.
- Shanon, C. E. 1948. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*. XXVII (3). 379-423.
- Santalo, L. A. 1976. *Integral geometry and geometric probability*. Addison Wesley Publishing Co. Reading, Ma. 404 pp.
- Stoyan, D.; Kendall, W. S.; Mecke, J. 1987. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons. Berlin. 345 pp.
- Underwood, E. E. 1970. *Quantitative stereology*. Addison Wesley Publishing Co. Reading, Ma. 275 pp.
- Visser, C. A.; Chessa, A. G. 2000. A new method for estimating lengths for partially exposed features. *Mathematical Geology*. 32. 109-126.

Original recibido: Enero 2001.  
Original aceptado: Marzo 2001.